Durée : 4 heures

Baccalauréat C Toulouse juin 1985

EXERCICE 1 **4 points**

Dans le plan P orienté, rapporté au repère orthonormé direct $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points distincts A, B et C d'affixes respectives a, b et $-b$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante vérifiée par a et b pour que les points A, B et C soient alignés.

On suppose dans la suite que les points A, B *et* C *ne sont pas alignés et que la base* $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ *est de sens direct.*

2. Sur les droites (AB) et (AC), à l'extérieur du triangle ABC, on construit les carrés AFGB et ACDE, et le parallélogramme AEHF de façon que les bases $\left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB}\right)$ et $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}\right)$ soient de sens direct.
   a. En considérant la rotation de centre A qui transforme C en E, montrer que l'affixe e du point E est $e = -\mathrm{i}b + a(1 - \mathrm{i})$.
   b. Calculer les affixes f, h et d des points respectifs F, H et D en fonction de a et b.
3. Déduire du **2.** que :
   a. FE = 2OA et' que les droites (EF) et (OA) sont perpendiculaires.
   b. BD = CH et que les droites (BD) et (CH) sont perpendiculaires.

EXERCICE 2 **4 points**

$\mathcal{E}$ est un espace orienté de dimension 3, rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

On considère le point O′(0 ; 0 ; 1), le vecteur $\vec{u} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\imath} + \frac{1}{2}\vec{\jmath}$ et les droites :

D_1 passant par O et de vecteur directeur $\vec{\imath}$;

D_2 passant par O′ et de vecteur directeur $\vec{\imath}$;

D_3 passant par O′ et de vecteur directeur $\vec{u}$.

On désigne par :

R_1 la rotation d'axe D_1 orienté par $\vec{\imath}$ et d'angle de mesure π.

R_2 la rotation d'axe D_2 orienté par $\vec{\imath}$ et d'angle de mesure π.

R_3 la rotation d'axe D_3 orienté par $\vec{u}$ et d'angle de mesure π.

Définir analytiquement et géométriquement :

$$f_1 = R_2 \circ R_1; \quad f_2 = R_3 \circ R_2; \quad f_3 = f_2 \circ f_1.$$

PROBLÈME **4 points**

On se propose d'étudier une équation différentielle intervenant dans la description de phénomènes biologiques et physiques (voir remarque en fin de texte).
Les trois parties sont dans une large mesure indépendantes.

Partie I On considère l'équation différentielle :

$$(E) : \quad y'(x) + 2y(x) = 3\mathrm{e}^{-3x}.$$

1. Déterminer le réel λ tel que la fonction y_0 définie par $y_0(x) = \lambda\mathrm{e}^{-3x}$ soit solution de (E).
2. Montrer que si y est solution de (E), alors $y - y_0$ est solution d'une équation différentielle homogène du premier ordre que l'on résoudra.
3. Déterminer alors toutes les solutions de (E).
4. Préciser la solution de (E) nulle en $x = 0$.

Partie II Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = 3\left(\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-3x}\right).$$

1. Étudier le sens de variation de f et ses limites.
2. Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
   a. Tracer (C). (On prendra pour unité 9 cm.)
   b. μ étant un réel strictement positif, déterminer l'aire $\mathcal{A}(\mu)$ de la partie définie par :
   $$\left\{\begin{array}{ccccc} 0 & \leqslant & x & \leqslant & \mu \\ 0 & \leqslant & y & \leqslant & f(x). \end{array}\right.$$
   c. Calculer la limite de $\mathcal{A}(\mu)$ lorsque μ tend vers $+\infty$.
3. Soit g la restriction de f à l'intervalle $\mathrm{I} = \left[\ln\dfrac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$ (ln désigne le logarithme népérien).
   Montrer que g est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.
   En déduire qu'il existe une seule valeur α de I telle que $g(\alpha) = \dfrac{1}{3}$.

Partie II À tout réel x on associe l'unique réel $h(x)$ tel que :

$$h^3(x) = 9(x-1).$$

1. Soit la suite (u_n) définie par :
   $$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 2 \\ u_{n+1} & = & h(u_n)\text{, pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{array}\right.$$
   En utilisant le sens de variation de h, montrer que la suite (u_n) est croissante.
2. Soit la suite (v_n) définie par :
   $$\left\{\begin{array}{lcl} v_0 & = & 3 \\ v_{n+1} & = & h(v_n)\text{, pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{array}\right.$$
   En utilisant le sens de variation de h, montrer alors que la suite (v_n) est décroissante.

3. **a.** Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul :

$$(i) \qquad 0 < v_n - u_n < 3^{-\frac{n}{3}}.$$

on pourra remarquer que $h(b) - h(a) = \int_a^b h'(t)\,\mathrm{d}t$, et en déduire que si $2 \leqslant a < b \leqslant 3$ alors $h(b) - h(a) \leqslant \dfrac{b-a}{\sqrt[3]{3}}$.

b. Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in]2~;~3]$.

4. Déduire de ce qui précède que les deux suites (u_n) et (v_n) convergent vers la limite ℓ.
5. En utilisant (i), calculer la valeur minimale de n qui permet de donner un encadrement de ℓ à 10^{-1} près.
6. Déduire de la question précédente un encadrement de α. (α a été défini au **II. 3.**).

Remarque : L'équation différentielle (E) permet de représenter dans certains cas les transformations d'un produit radioactif ou la diffusion plasmatique d'un médicament lors d'une piqûre intramusculaire (f donne la variation des états successifs et α l'instant d'un état donné).