Durée : 4 heures

Baccalauréat C Toulouse septembre 1971

EXERCICE 1

Soit le nombre complexe $z = -6\sqrt{3}(1+\text{i})\cdot$
Calculer le module et l'argument de ce nombre. Donner sous forme trigonométrique, puis sous forme cartésienne, les racines cubiques du nombre z.

EXERCICE 2

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on donne les deux points I$(-1\,;\,0)$ et J$(1\,;\,0)$.
Soit un point C$(m\,;\,0)$ variable sur l'axe des abscisses ($m \in \mathbb{R}$).

1. Comment faut-il choisir m pour que le point C puisse être le centre d'un cercle noté (C_m) du faisceau à points limites I et J ?
   Écrire l'équation du cercle (C_m).
2. On attribue au paramètre m les valeurs $+2$ et -3, auxquelles sont associés les deux cercles (C_2) et (C_{-3}) du faisceau précédent.
   Déterminer l'ensemble des points M du plan, tels que

$$\mathcal{P}_{M/(C_2)} + 2\mathcal{P}_{M/(C_{-3})} = 0.$$

N.-B. - $\mathcal{P}_{M/(C_2)}$ et $\mathcal{P}_{M/(C_{-3})}$ représentent les puissances du point M respectivement par rapport aux cercles (C_2) et (C_{-3}).

PROBLÈME

Dans tout ce problème, on étudie la fonction

$$\alpha \longmapsto \frac{5\alpha-3}{\alpha+1} = 5 - \frac{8}{\alpha+1},$$

pour des ensembles de départ A et d'arrivée B, qui seront précisés au début de chaque partie de l'énoncé.

Partie A

Dans toute cette question, on suppose $A = \mathbb{N}^\star$ (ensemble des entiers naturels autres que 0) et $B = \mathbb{Q}$ (ensemble des rationnels).
On définit ainsi une fonction qui, à un entier n, fait correspondre un rationnel-image, r, tel que

$$r = \frac{5n-3}{n+1} = 5 - \frac{8}{n+1}.$$

1. Pour quelles valeurs de n le rationnel r est-il entier ? Déterminer les valeurs correspondantes de r.
2. **a.** Démontrer que le plus grand diviseur commun des deux nombres $5n-3$ et $n+1$ est nécessairement un diviseur du nombre 8.

   b. En déduire que, si n est pair, $5n-3$ et $n+1$ sont premiers entre eux.

c. Quels sont les entiers n pour lesquels le plus grand diviseur commun de $5n-3$ et $n+1$ est 8 ?

Partie B

Dans toute cette partie, on suppose $A = B = \mathbb{R}$ (ensemble des nombres réels) et l'on note f la fonction qui, au réel x différent de -1, associe

$$f(x) = \frac{5x-3}{x+1}.$$

1. Étudier les variations de la fonction f et tracer sa représentation graphique (H) dans un repère orthonormé.
2. Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe (H) et de la droite d'équation $y = x$.

   Calculer l'aire de l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$, tels que

$$1 \leqslant x \leqslant 3 \quad \text{et} \quad x \leqslant y \leqslant f(x).$$

Partie C

Dans cette question, $A = B = \mathbb{C}$ (ensemble des complexes). Au nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ différent de -1 correspond

$$Z = X + \mathrm{i}Y = \frac{5z-3}{z+1}.$$

Dans le plan complexe, au point m d'affixe z correspond le point M d'affixe Z.

1. Calculer le carré du module de Z en fonction de x et de y. Former l'équation de l'ensemble (C) des points m pour lesquels le module de Z est 3.
2. Calculer X et Y en fonction de x et de y. Former l'équation de l'ensemble (Γ) des points m pour lesquels Z est un nombre imaginaire pur. Vérifier que les courbes (C) et (Γ) sont orthogonales.
3. Retrouver géométriquement les résultats des deux questions précédentes en faisant intervenir les points P et Q d'affixes respectives -1 et $\frac{3}{5}$.