Baccalauréat C Toulouse septembre 1972

EXERCICE 1

1. Étudier la fonction f qui au nombre réel x fait correspondre

$$f(x) = \frac{2x\left(x^2-2\right)}{x^2-1}.$$

Construire la courbe représentative (Γ). Montrer que la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à (Γ).

2. Calculer l'aire géométrique, $S(a)$, de la région du plan limitée par la courbe (Γ), l'asymptote oblique et les droites d'équations respectives $x = \sqrt{2}$ et $x = a\,(a > 1)$.
3. Étudier et représenter graphiquement la fonction, S, qui au nombre réel $a > 1$ fait correspondre $S(a)$.

EXERCICE 2

1. Déterminer les entiers relatifs n tels que

$$n^3 + 1 \equiv 0 \pmod 7.$$

Déterminer les entiers relatifs n tels que

$$n^3 - 1 \equiv 0 \pmod 7.$$

2. Démontrer que $n\left(n^3+1\right)\left(n^3-1\right)$ est divisible par 42, quel que soit n entier relatif.

PROBLÈME

1. On considère un plan affine euclidien orienté (P). Le plan (P) étant muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, soit H_k l'application de (P) dans (P) qui, au point M de coordonnées $(x\,;\,y)$, fait correspondre le point M$'$ de coordonnées $(x'\,;\,y')$ définies par

$$\left\{\begin{array}{l c l} x' & = & kx - k + 1,\\ y' & = & ky, \quad k \text{ étant un nombre réel donné.}\end{array}\right.$$

   a. Cette application H_k est-elle une bijection ? A-t-elle des points invariants ? Déterminer la nature de l'application.

   b. Étudier la figure transformée par H_k d'une droite (D) d'équation $ax + by + c = 0$.
   Donner les conditions pour que (D) soit globalement invariante.

   c. Étudier la figure transformée du cercle (C) de centre A(1 ; 1) et de rayon 1.

2. Soit R l'application de (P) dans (P) qui, au point M de coordonnées $(x\,;\,y)$, fait correspondre le point M$'$ de coordonnées $(x'\,;\,y')$ définies par

$$\left\{\begin{array}{l c l} x' - 1 & = & \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y - 1)\\ y' & = & \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y - 1).\end{array}\right.$$

a. Si z est l'affixe de M et z' celle de M', trouver z' en fonction de z.
En déduire la nature de la transformation R, et la définir géométriquement.

b. Soit G le barycentre des points I$(x = -1\ ;\ y = 0)$, M et M$'$, affectés des coefficients -1, 1 et 2.
Calculer l'affixe de G, en fonction de l'affixe z de M.
Trouver l'ensemble des points G si M décrit la droite (Δ) d'équation $x = 2$.

c. Étudier l'application $R \circ \mathrm{H}_k$ ($\circ$ étant le symbole de la loi de composition des applications).
Les deux applications R et H_k sont-elles commutables ?

3. Dans le plan affine euclidien (P) on considère l'application S qui, au point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$, fait correspondre le point M$'$ de coordonnées $(x'\ ;\ y')$ définies par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & y-1\\ y' & = & x+1.\end{array}\right.$$

a. S est-elle une isométrie ? A-t-elle des points invariants ? Définir S géométriquement.

b. Soit $T = S \circ R \circ \mathrm{H}_{\sqrt{2}}$ ($\mathrm{H}_{\sqrt{2}}$ est l'application de la question 1 où $k = \sqrt{2}$.)
Les applications S, R et $\mathrm{H}_{\sqrt{2}}$ sont-elles deux à deux commutables ?
Soit (Γ) la courbe d'équation

$$y = \frac{6x-1}{4x-2}$$

Trouver l'équation de (Γ_1) transformée (Γ) par l'application $T = S \circ R \circ \mathrm{H}_{\sqrt{2}}$.
Étudier (Γ_1). préciser ses axes de symétrie, ses foyers, ses asymptotes, ses directrices. En déduire ceux de (Γ).