Baccalauréat C Toulouse septembre 1973

EXERCICE 1

On rappelle que l'ensemble E des fonctions polynômes de variable réelle, de degré inférieur ou égal à 2, a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ pour l'addition des fonctions et la multiplication d'une fonction par un nombre réel.

1. Soit φ l'application :

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (P\,;\,Q) & \longmapsto & \varphi(P\,;\,Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t. \end{array}$$

Montrer que φ est un produit scalaire dans l'espace vectoriel E.

2. Soit $P_0,\ P_1,\ P_2$ les fonctions polynômes de E définies par

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x,\ P_2(x) = x^2.$$

Calculer les normes de $P_0,\ P_1,\ P_2$ et les produits scalaires $\varphi(P_0\,;\,P_1),\ \varphi(P_1\,;\,P_2),\ \varphi(P_0\,;\,P_2)$.

Déterminer trois fonctions polynômes $Q_0,\ Q_1,\ Q_2$ telles que

a. $(Q_0,\ Q_1,\ Q_2)$ soit une base orthonormée de E.

b. P_0 et Q_0 soient colinéaires,

c. P_1 et Q_1 soient colinéaires.

EXERCICE 2

Dans un plan affine euclidien, deux points M_1 et M_2 sont en mouvement par rapport au repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ sur deux cercles (C_1) et (C_2) de centre O de rayons R et $\dfrac{1}{\mathrm{R}}$ (R est un nombre réel plus grand que 1) de sorte. que les angles $\left(\vec{\imath},\,\overrightarrow{\mathrm{OM}_1}\right)$ et $\left(\vec{\imath},\,\overrightarrow{\mathrm{OM}_2}\right)$ ont, à chaque instant t, $(0 \leqslant t < 2\pi)$, des déterminations respectivement égales à t et $-t$.

Montrer que les coordonnées du milieu M de $(\mathrm{M}_1,\ \mathrm{M}_2)$ sont

$$x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{R} + \frac{1}{\mathrm{R}}\right)\cos t \text{ et } y = \frac{1}{2}\left(\mathrm{R} - \frac{1}{\mathrm{R}}\right)\sin t.$$

Quelle est la trajectoire de M ? Donner ses éléments géométriques (sommets, foyers, ...) et la représenter graphiquement pour $\mathrm{R} = 2$.

Montrer que le vecteur vitesse de M est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2}$.

EXERCICE 3

$\mathbb{R}_+^*$ désigne l'ensemble des réels strictement positifs.

Dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ d'axes $x'\mathrm{O}x$, $y'\mathrm{O}y$, on appelle (Γ) la courbe représentative de la fonction logarithme népérien $(x \longmapsto \mathrm{Log}\,x)$ et,

pour $a \in \mathbb{R}_+^* - 1$, on appelle (Γ_a) la courbe représentative de la fonction logarithme de base a $(x \longmapsto \log_a x)$.

Partie A

1. **a.** Soit h l'homothétie de rapport k, de centre O.
   Calculer l'équation de l'image $\left(\Gamma'_a\right)$ de (Γ_a) par h. $(k \neq 0)$.

   b. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{v}\,(0\ ;\ \alpha)$.
   Calculer l'équation de l'image $\left(\Gamma''_a\right)$ de (r) par t.

   c. Peut-on déterminer a. en fonction de k et a pour que $\left(\Gamma''_a\right)$ passe par le point $\mathrm{I}(1\,;\,0)$?

   d. Lorsque a existe, montrer qu'il existe un nombre b, que l'on calculera en fonction de k et a, tel que $\left(\Gamma'_a\right) = (\Gamma_b)$.

2. On suppose $a \neq b,\ \ a \in \mathbb{R}_+^* - 1,\ \ b \in \mathbb{R}_+^* - 1,\ \ \dfrac{\operatorname{Log} a}{\operatorname{Log} b} > 0$.
   Déduire de la première question qu'il existe une homothétie H par laquelle (Γ_b) est l'image de (Γ_a).
   Déterminer le rapport de H et les coordonnées de son centre en fonction de a et b.

3. Montrer que toute courbe (Γ_a) est l'image de (Γ) soit par une homothétie, soit par une similitude inverse.

Partie B

On suppose $a > 1$ et $a \neq e$.
D'après la question **A , 2.**, (Γ) a pour image (Γ_a) par une homothétie H dont le centre ω_a a pour coordonnées

$$x = 0, \quad y = \frac{\operatorname{Log}(\operatorname{Log} a)}{1 - \operatorname{Log} a}.$$

On se propose de déterminer l'ensemble des points ω_a.

1. Soit g la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) = x\operatorname{Log} x - x + 1.$$

   Déterminer sa dérivée, son sens de variation et son signe.

2. Soit f la fonction définie par

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(x) & = & \dfrac{\operatorname{Log} x}{1-x},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^* - 1 \\ f(1) & = & -1. \end{array}\right.$$

   Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Étudier sa dérivée sur $\mathbb{R}_+^* - 1$, son sens de variation, ses limites.

3. Déduire, de l'étude de f l'ensemble des points ω_a.

N. B. La partie B peut être traitée en admettant les résultats de A qui y sont rappelés.