Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C septembre 1975 Toulouse ∽

EXERCICE 1

Étudier les restes des quatre nombres : 2, 2^2, 2^3, 2^4 dans la division par 5, et démontrer que, quel que soit l'entier strictement.positif n, le nombre

$$17^{4n+2}+32^{4n-1}+3 \quad \text{est divisible par 5.}$$

EXERCICE 2

Soit f la fonction numérique de la variable réelle définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(0) & = & 0 \\ f(x) & = & -2x\text{Log}\,x \quad \forall x \in]0\,;\,1[\quad \text{(Log : logarithme népérien)} \\ f(x) & = & -x\text{e}^{x-1}+1 \quad \forall x \in [1\,;\,+\infty[\end{array}\right.$$

1. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}_+$
2. La fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}_+$?
3. Étudier la variation de la fonction f (on ne demande pas la construction de la courbe représentative).

PROBLÈME

Partie A

Soit E l'ensemble des matrices carrées 2×2 à termes réels de la forme :

$$m=\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}$$

E est muni des lois addition et multiplication définies par : a . b) (a' b') (a + a'

$$\begin{array}{lcl} m+m' & = & \begin{pmatrix} a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a' & b'\\ 0 & a'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b'\\ 0 & a+a'\end{pmatrix}\\ m\times m' & = & \begin{pmatrix} a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} a' & b'\\ 0 & a'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ab'+a'b\\ 0 & aa'\end{pmatrix}\end{array}$$

$\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes notés

$$z=a+b\text{i},\quad (a\,;\,b)\in\mathbb{R}^2$$

On considère l'application φ :

$$\begin{array}{rccc}\varphi : & \mathbb{C} & \to & \text{E}\\ & a+b\text{i} & \longmapsto & \begin{pmatrix} a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}\end{array}$$

1. Démontrer que φ est un isomorphisme de ($\mathbb{C}$, +) sur (E, +). L'application φ est-elle un isomorphisme de ($\mathbb{C}$, ×) sur (E, ×) ?

2. Démontrer que (E, +, ×) est un anneau. Cet anneau est-il commutatif? Est-il unitaire? Quels sont les éléments inversibles de cet anneau?

3. φ associe à $z = a + b\text{i}$ la matrice $m = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$

à $z' = a' + b'\text{i}$ la matrice $m' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & a' \end{pmatrix}$

On notera $z\text{T}z'$ le nombre complexe dont l'image par φ est $m \times m'$. On définit ainsi une loi de composition interne dans $\mathbb{C}$. Démontrer que φ est un isomorphisme de $(\mathbb{C}, +, \text{T})$ sur $(\text{E}, +, \times)$.
En déduire la structure de $(\mathbb{C}, +, \text{T})$.
Quelle est la restriction de la loi T à $\mathbb{R}$?

4. a. On note

$$z^{(0)} = 1, \quad z^{(1)} = z, \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star,\ z^{(n)} = z^{(n-1)}\,\text{T}\,z$$

Calculer $\text{i}^{(2)}$ et $\text{i}^{(n)}$ pour $n \geqslant 2$.
En posant $z = a + b\text{i}$, calculer $z^{(n)}$.

b. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, les équations

$z^{(2)} = 1$
$z^{(n)} = 1$ n étant un entier naturel donné supérieur à 2
$z^{(n)} = \alpha$, α étant un réel donné, n un entier naturel donné supérieur ou égal à 2.

c. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation

$$z^{(2)} - z - 6 + 4\text{i} = 0$$

Partie B

1. Soit P un plan vectoriel de base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Soit F l'application linéaire de P vers P dont la matrice dans la base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ est $m = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $(a\,;\,b) \in \mathbb{R}^2$.

a. Dans quels cas F est-elle bijective?

b. Suivant les valeurs de a et b, quel est l'ensemble des vecteurs invariants par F? (On notera $(X\,;\,Y)$ les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$, et $\left(X'\,;\,Y'\right)$ celles de $F\left(\vec{u}\right)$.

2. Soit Π un plan affine de repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ associé au plan vectoriel π. Soit f l'application affine de Π vers Π ayant F pour application linéaire associée et telle que le point O soit invariant.

a. Exprimer en fonction de coordonnées $(x\,;\,y)$ d'un point M les coordonnées $\left(x'\,;\,y'\right)$ de son image $M' = f(M)$.

b. Dans le cas particulier où $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = 5$, quelle est l'équation de la courbe Γ' transformée de la courbe Γ d'équation $y^2 = x$?
Préciser sa nature et ses éléments.

c. Soit le point I_0 de coordonnées $(4\,;\,-3)$ et les points $\text{I}_1, \text{I}_2, \ldots, \text{I}_n$ images respectives par f des points $\text{I}_0, \text{I}_1, \ldots, \text{I}_{n-1}$.
Déterminer les coordonnées des points $\text{I}_1, \text{I}_2, \ldots, \text{I}_n$ en fonction de a et b.
Dans le cas particulier où $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = 5$, lorsque n augmente indéfiniment dans $\mathbb{N}$, le point I_n a-t-il une position limite?

d. Soit G_n le barycentre des points $\text{I}_0, \text{I}_1, \ldots, \text{I}_n$ affectés de coefficients tous égaux à 1.
Donner les coordonnées de G_n en fonction de a et b.
Dans le cas particulier où $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = 5$, lorsque n augmente indéfiniment dans $\mathbb{N}$, le point G_n a-t-il une position limite?