Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Toulouse septembre 1975 ∾

EXERCICE 1

Étant donné un réel α, on considère les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & \in & \mathbb{R}\\ u_{n+1} & = & \dfrac{2}{5}u_n+3, \quad \forall n\in\mathbb{N}\\ v_n & = & u_n+\alpha\end{array}\right.$$

1. Calculer v_{n+1} en fonction de v_n et α. Comment choisir α pour que v_n soit une sui te géométrique ?
2. Calculer u_n en fonction de u_0 et n. En déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2

Résoudre, dans le corps des complexes, l'équation :

$$(1+\cos 2\theta)z^2-(2\sin 2\theta)z+2=0$$

où θ est un nombre réel donné tel que $0\leqslant\theta<2\pi$.
Déterminer, suivant les valeurs de θ, le module et l'argument des racines de cette équation, quand elles existent.

PROBLÈME

$\mathscr{P}$ est le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.
On appelle T l'application affine de $\mathscr{P}$ qui à tout point M de coordonnées $(x\,;\,y)$ associe $M'=T(M)$ de coordonnées $\left(x'\,;\,y'\right)$ avec :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & ax+cy\\ y' & = & bx+dy\end{array}\right.$$

où a, b, c, d sont quatre entiers relatifs vérifiant la relation (R) : $ad-bc=1$.

$\mathscr{T}$ est l'ensemble des applications T obtenues en donnant aux entiers relatifs a, b, c, d toutes les valeurs vérifiant (R).

Partie A

1. Montrer que $\mathscr{T}$, muni de la loi de composition des applications, est un groupe.
2. Quelle condition doivent vérifier a et d pour que T admette plus d'un point invariant ?
   Préciser alors l'ensemble des points invariants par T (on considèrera les deux cas $a=1$, $a\neq 1$).

Partie B

Soit A le point de coordonnées $(1\,;0)$, A$'$ le point de coordonnées $(3\,;4)$. On considère le sous-ensemble $\mathscr{F}$ de $\mathscr{T}$ des applications T telles que $T(\mathrm{A})=\mathrm{A}'$.

1. Montrer que $\mathscr{F}$ est l'ensemble des applications, notées f_k ($k \in \mathbb{Z}$), associant au point $M(x\,;\,y)$ le point $M'\left(x'\,;\,y'\right)$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & 3x + (2+3k)y \\ y' & = & 4x + (3+4k)y \end{array}\right.$$

2. Définir l'application réciproque de f_k. Appartient-elle à $\mathscr{F}$?
3. Déterminer l'entier relatif k, de telle sorte qu'il existe une droite D de points invariants par f_k. Préciser D.
4. On donne à k la valeur -1 et on note $f = f_{-1}$.
   a. M étant un point du plan d'image $M' = f(M)$ distincte de M, que peut-on dire de la direction définie par $\overrightarrow{MM'}$. Quelle est la transformée par f d'une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{\jmath}$? En déduire une construction géométrique de l'image M' d'un point quelconque M du plan.
   b. On considère la fonction numérique φ de la variable réelle x :

$$x \longmapsto \varphi(x) = \frac{7}{2}\left(x - 2 + \frac{1}{x}\right).$$

   Étudier les variations de φ et construire sa courbe représentative (H) dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath}\right)$.
   Former l'équation de la courbe $\left(H'\right)$ transformée de (H) par f. Montrer que $\left(H'\right)$ est une conique dont on précisera la nature. Déterminer ses éléments remarquables et la construire ; vérifier que $\left(H'\right)$ passe par A$'$ et déterminer la tangente en ce point.
   (Les deux courbes pourront être dessinées sur deux figures distinctes).