

∞ Baccalauréat C Toulouse septembre 1976 ∞

EXERCICE 1

1. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel m , les restes dans la division euclidienne par 16 des entiers : $5^m, 6^m$.
2. Soit (u_n) la suite arithmétique de raison 16 et de premier terme $u_0 = 9$, et (v_p) la suite géométrique de raison 5 et de premier terme $v_0 = 1$.
Démontrer que ces deux suites ont une infinité de termes égaux dont on calculera les deux premiers,
3. Soit (u'_n) la suite arithmétique de raison 16 et de premier terme $u'_0 = 8$, et (v'_p) la suite géométrique de raison 6 et de premier terme $v'_{00} = 9$.
Démontrer que ces deux suites n'ont qu'un seul terme commun que l'on déterminera,

EXERCICE 2

Le plan vectoriel \vec{P} étant rapporté à la base (\vec{i}, \vec{j}) , on considère les endomorphismes p et q de \vec{P} ayant respectivement pour matrices A et B dans la base (\vec{i}, \vec{j}) .

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que p et q sont des projections vectorielles et déterminer les sous-espaces vectoriels de \vec{P} qui les caractérisent.
2. On considère l'ensemble F des endomorphismes $f_{(a,b)}$ de \vec{P} tels que :

$$f_{(a,b)} = ap + bq, \quad (a; b) \in \mathbb{R}^2$$

- a. Donner une condition sur a et b pour que $f_{(a,b)}$ soit une bijection, et démontrer que le sous-ensemble des bijections de F muni de la composition des applications est un groupe abélien.
- b. Démontrer que $f_{(1,-1)}$ et $f_{(-1,1)}$ sont des symétries vectorielles et déterminer les sous-espaces vectoriels de \vec{P} qui les caractérisent.

PROBLÈME

Partie A

Calculer les trois intégrales :

$$\int_0^1 e^x dx, \quad \int_0^1 xe^x dx, \quad \int_0^1 x^2 e^x dx$$

En déduire que si $g(x) = x(x+2-e)$, alors $\int_0^1 g(x) dx = 0$.

Partie B

Si t est un nombre réel fixé, on considère la fonction de la variable réelle x

$$f_t(x) = (x - t)e^{\frac{x}{2}}$$

Soit E l'ensemble des couples $(t_1 ; t_2)$ de \mathbb{R}^2 tels que $\int_0^1 f_{t_1}(x) f_{t_2}(x) dx = 0$.

1. Montrer en utilisant la fonction g de la partie A que E n'est pas vide.
2. Démontrer qu'un élément $(t_1 ; t_2)$ de \mathbb{R}^2 appartient à E si et seulement si

$$(e - 1)t_1 t_2 - (t_1 + t_2) + e - 2 = 0.$$

Écrire cette condition sous la forme :

$$(t_1 - \alpha)(t_2 - \alpha) = -k^2 \quad (1)$$

où α et k sont des réels que l'on calculera (pour établir l'existence de k^2 , on pourra vérifier l'inégalité $(e - 1)^2 > e$ en utilisant l'encadrement $2,7 < e < 2,8$).

3. En étudiant le signe de $f_{t_1}(x) f_{t_2}(x)$ sur $[0 ; 1]$, démontrer que si $(t_1 ; t_2)$ appartient à E , l'un au moins des deux réels t_1 ou t_2 appartient à $[0 ; 1]$.

Partie C

Dans un plan affine euclidien P rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par A_t le point de coordonnées $(t ; 0)$.

1. Démontrer en utilisant (1) qu'il existe deux points du plan, I et J , tels que $(t_1 ; t_2)$ appartient à E si et seulement si

$$\overrightarrow{IA_{t_1}} \cdot \overrightarrow{IA_{t_2}} = \overrightarrow{JA_{t_1}} \cdot \overrightarrow{JA_{t_2}} = 0.$$

2. Établir que $(t_1 ; t_2)$ appartient à E si et seulement si le cercle de diamètre $[A_{t_1}, A_{t_2}]$ passe par I et J .
3. Calculer à l'aide d'une remarque géométrique simple le minimum de $|t_2 - t_1|$ quand $(t_1 ; t_2)$ décrit E .
4. Dédire du 2. par une interprétation géométrique du B 1. ou B 3. que I et J appartiennent au disque de diamètre $[A_0, A_1]$.

N. B. - Il est conseillé de faire des figures dans cette partie.