Durée : 4 heures

Baccalauréat C Toulouse septembre 1969

Le candidat doit traiter LES DEUX EXERCICES et LE PROBLÈME

I

On considère la fonction suivante :

$$f : x \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right] \longmapsto f(x) = \sqrt{4+\cos x} - x - 1.$$

Existe-t-il des nombres x tels que $f(x) = 0$?

II

On considère l'application f de l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes dans lui-même qui, au nombre complexe $z = a + \mathrm{i}b$, où a et b sont, des nombres réels et $\mathrm{i}^2 = -1$, associe le nombre complexe

$$f(z) = \mathrm{e}^a(\cos b + \mathrm{i}\sin b).$$

Étant donné un nombre complexe Z, de module r et d'argument θ, quel est l'ensemble des nombres complexes z tels que $f(z) = Z$?
L'application f est-elle surjective ; injective ?
Quelle est la relation qui lie $f(z)$, $f(z')$ et $f(z+z')$ si z et z' sont deux nombres complexes ?

III

Dans un plan orienté rapporté à un repère orthonormé $x'\mathrm{O}x$, $y'\mathrm{O}y$, de vecteurs unitaires $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$, on considère un cercle fixe (Γ), de centre O et de rayon R.
À tout point M de (Γ), repéré par la mesure algébrique de l'angle $\left(\vec{\imath}\,,\,\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$, dont θ désigne une détermination, on associe son symétrique, N, par rapport à $x'\mathrm{O}x$. Soit F un point fixe de (Γ), n'appartenant pas à $x'\mathrm{O}x$, et soit φ une détermination de la mesure algébrique de l'angle $\left(\vec{\imath}\,,\,\overrightarrow{\mathrm{OF}}\right)$. On suppose $0 < \varphi < \pi$.

Partie A

On cherche à déterminer les points M de (Γ) tels que MN = MF.

1. Utiliser le fait que l'égalité MN = MF se traduit par le fait que les mesures algébriques des angles $\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}}\,,\,\overrightarrow{\mathrm{ON}}\right)$ et $\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}}\,,\,\overrightarrow{\mathrm{OF}}\right)$ sont égales ou opposées pour montrer l'existence, en général, de quatre solutions, M_0, M_1, M_2, M_3, dont trois, M_0, M_1 et M_2 sont sommets d'un triangle équilatéral.
   Dans quels cas n'y a-t-il que trois solutions ?
2. Retrouver ces résultats en établissant les égalités

   $$\mathrm{MN}^2 = 4R^2\sin^2\theta \quad \text{et} \quad \mathrm{MF}^2 = 2R^2[1-\cos(\varphi-\theta)]$$

   et en résolvant une équation trigonométrique ayant pour inconnue θ.
   Calculer les angles (Ox, OX) et (Ox, OY), où OX et OY désignent les droites bissectrices des angles $(\mathrm{OM}_0, \mathrm{OM}_1)$ et $(\mathrm{OM}_2, \mathrm{OM}_3)$.
   En déduire que les angles de droites $(\mathrm{O}x, \mathrm{M}_0\mathrm{M}_1)$ et $(\mathrm{O}x, \mathrm{M}_2\mathrm{M}_3)$ sont opposés.

Partie B

On cherche, plus généralement, à déterminer les points M de (Δ) tels que
$\text{MF} = \dfrac{e}{2}\text{MN}$, où e est un nombre positif donné.

1. Montrer que cette égalité est réalisée si, et seulement si,

$$2\sin\frac{\theta-\varphi}{2} = \pm e\sin\theta.$$

2. Étudier les variations de la fonction

$$\theta \longmapsto z = \frac{\sin\dfrac{\theta-\varphi}{2}}{\sin\theta}$$

quand $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$.

Montrer, en particulier, que la dérivée est

$$z' = \frac{\cos^2\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\varphi}{2}\left[\text{tg}^3\dfrac{\theta}{2} + \text{tg}\dfrac{\varphi}{2}\right]}{\sin^2\theta}.$$

En déduire que z présente, pour une valeur négative, θ_0 de θ, un minimum positif, m. On ne cherchera à calculer ni θ_0 ni m.

Tracer le graphe de la fonction.

En déduire qu'il y a, suivant les valeurs de e, quatre, deux ou trois points M de (Δ) tels que

$$\text{MF} = \frac{e}{2}\text{MN}.$$