

∞ Baccalauréat C Toulouse septembre 1978 ∞

EXERCICE 1

4 POINTS

Soit f la fonction réelle de variable réelle qui, à x , associe

$$f(x) = |e^{-2x} - 2e^{-x}|$$

1. Étudier les variations de f .

Étudier la continuité et la dérivabilité de f au point $x_0 = -\text{Log}2$. Construire la courbe représentative \mathcal{C} de f dans un repère orthonormé.

2. λ étant un réel supérieur ou égal à $\text{Log}2$, calculer l'aire de l'ensemble des points M de coordonnées $(x; y)$ vérifiant

$$\begin{cases} -\text{Log}2 \leq x \leq \lambda \\ 0 \leq y \leq f(x). \end{cases}$$

Soit $\mathcal{A}(\lambda)$ cette aire.

3. Déterminer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$?

EXERCICE 2

4 POINTS

Une urne contient $n + 8$ boules distinctes de trois couleurs :

n boules bleues (n entier ≥ 2)

5 boules rouges

3 boules vertes.

1. On tire deux boules de l'urne sans remise et on se place dans l'hypothèse de l'équiprobabilité.

Une règle du jeu a été établie de la façon suivante :

- on gagne quand on tire deux boules de la même couleur
- on perd quand on tire deux boules de couleurs distinctes.

Calculer en fonction de n la probabilité p_n de gain puis la probabilité q_n de perte.

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$. Ce résultat était-il prévisible?

2. On effectue maintenant une série de dix tirages de deux boules comme au 1. en remettant chaque fois les deux boules tirées dans l'urne.

Calculer en fonction de n la probabilité p_n pour obtenir 9 fois et 9 fois seulement un tirage de deux boules de la même couleur.

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$. Ce résultat était-il prévisible?

PROBLÈME

4 POINTS

On donne :

\mathcal{P} plan vectoriel euclidien muni d'une base orthonormée (\vec{i}, \vec{j})

\mathcal{D}_1 , droite vectorielle de \mathcal{P} de base $\begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{i} \end{pmatrix}$

\mathcal{D}_2 , droite vectorielle de \mathcal{P} de base $\begin{pmatrix} \vec{j} \\ \vec{j} \end{pmatrix}$

\mathcal{A} l'ensemble des applications linéaires de \mathcal{P} dans \mathcal{P} qui laissent tout vecteur de \mathcal{D}_1 invariant et la droite vectorielle \mathcal{D}_2 globalement invariante.

Partie A

1. Montrer que toute application de \mathcal{A} a une matrice dans la base (\vec{i}, \vec{j}) qui peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \text{ avec } a \text{ paramètre de } \mathbb{R} - \{0\}.$$

On notera φ_a l'application linéaire de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ dans la base (\vec{i}, \vec{j}) .

2. Donner l'image par φ_a de la droite vectorielle d'équation cartésienne dans la base (\vec{i}, \vec{j}) :

$$\alpha x + \beta y = 0 \text{ avec } (\alpha; \beta) \neq (0; 0) \text{ et } (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$$

En déduire que les seules droites laissées globalement invariantes par φ_a avec $a \neq 1$ sont \mathcal{D}_1 , et \mathcal{D}_2 .

Partie B

On donne :

P plan affine euclidien, associé à \mathcal{P} , muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soient les points A (1; 0); B(-1; 0); C (0; 1)

Soit \mathcal{B}_b l'ensemble des applications affines de P dans P qui laissent O et A invariants et qui transforment C en C' tel que $\overrightarrow{OC} = b\overrightarrow{OC'}$ avec b paramètre fixe de $\mathbb{R} - \{0; 1\}$.

1. Montrer que \mathcal{B}_b ne contient qu'une seule application que l'on notera f_b dont on donnera l'expression analytique dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Caractériser cette application pour $b = 1$; puis pour $b = -1$.
2. m étant la projection orthogonale d'un point M quelconque de P sur la droite (AB); M' étant l'image de M par f_b calculer $\overrightarrow{mM'}$ en fonction de \overrightarrow{mM} .
3. On désigne par E_b l'image par f_b du cercle Ω de centre O de rayon OA.
Déterminer E_b pour $|b| = 1$. Déterminer E_b pour $|b| \neq 1$; préciser les éléments remarquables.

Partie C

Soit C l'ensemble des applications affines de P dans P conservant globalement le cercle Ω et conservant globalement la droite (AB).

1. Montrer que C est non vide et que toute application de C est bijective.
2. Montrer que C est la réunion de deux ensembles non vides notés C_A et C_B , C_A étant l'ensemble des applications de C pour lesquelles A est invariant et C_B l'ensemble des applications de C pour lesquelles A est transformé en B.
En déduire que toute application de C laisse O invariant.
3. Soit F une application quelconque de C et u son endomorphisme associé.
Montrer que u transforme tout vecteur de norme 1 en un vecteur de norme 1.
En déduire que u conserve la norme de tout vecteur de \mathcal{P} (c'est-à-dire $\forall \vec{V} \in \mathcal{P}, \|u(\vec{V})\| = \|\vec{V}\|$).
Quelle est la nature de F?
4. En déduire que C ne contient que quatre applications que l'on caractérisera,

Partie D

Soit \mathcal{E}_b l'ensemble des applications affines de P dans P transformant le cercle Ω en E_b et qui laissent la droite (AB) globalement invariante.

1. Montrer que l'application f_b du B est une application de \mathcal{E}_b .
2. Soit φ une application de \mathcal{E}_b , montrer que $f_b^{-1} \circ \varphi$ est une isométrie ponctuelle de P .
3. Démontrer que \mathcal{E}_b ne contient que quatre applications affines que l'on déterminera.