

Baccalauréat C septembre 1981 Toulouse

EXERCICE 1

Soit $U = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_1 &= 1 \\ u_{n+1} &= 10u_n - 9u_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1. Calculer u_2, u_3, u_4 ?
2. Soit $V = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}: v_n = u_{n+1} - u_n.$$

Montrer que V est une suite géométrique.

Calculer v_n et u_n en fonction de n .

La suite U est-elle convergente?

3. Calculer, en fonction de n ,

$$S_n = \sum_{i=0}^n u_i.$$

EXERCICE 2

Dans un plan affine euclidien P rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ les coordonnées d'un point mobile M sont définies, en fonction du temps t , par

$$\forall t \in [1; +\infty[\quad \begin{cases} x &= \frac{3}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) \\ y &= 2 \left(t - \frac{1}{t} \right) \end{cases}$$

1. Montrer que la trajectoire du mobile est incluse dans une hyperbole H . (on pourra calculer t et $\frac{1}{t}$ en fonction de x et y et en déduire une équation cartésienne de H).
Préciser les sommets, les asymptotes, les foyers de l'hyperbole et la construire dans le plan P rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm).
2. Étudier, lorsque t décrit $]1; +\infty[$, les variations de l'ordonnée du mobile M .
Préciser la trajectoire T décrite par M et le sens du mouvement sur cette trajectoire.
3. Calculer, à l'instant t , les coordonnées du vecteur vitesse $\overrightarrow{V}(t)$ et du vecteur accélération $\overrightarrow{\Gamma}(t)$ du mobile M .
Allure du mouvement de M sur sa trajectoire?

PROBLÈME**Partie A**

Soit E un espace vectoriel euclidien de base orthonormée $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. φ est l'endomorphisme de E défini par

$$\begin{cases} \varphi(\vec{i}) &= \frac{1}{3}(\vec{j} + \vec{k}), \\ \varphi(\vec{j}) &= \frac{1}{6}(-2\vec{i} + \vec{k}), \\ \varphi(\vec{k}) &= \frac{1}{6}(-2\vec{i} - \vec{j}) \end{cases}$$

$\vec{\omega}$ est le vecteur $\vec{\omega} = \frac{1}{3}(-\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k})$.

1. Dans la base B , un vecteur \vec{u} de coordonnées $(x; y; z)$ a pour image le vecteur $\varphi(\vec{u})$ de coordonnées $(x'; y'; z')$.

Exprimer x' , y' et z' en fonction de x , y et z .

Montrer que pour tout vecteur \vec{u} de E , $\varphi(\vec{u})$ est orthogonal à \vec{u} .

2. Déterminer le noyau de φ (noté $\text{Ker } \varphi$).

Vérifier que $(\vec{\omega})$ est une base de $\text{Ker } \varphi$.

Déterminer l'image de φ (notée $\text{Im } \varphi$).

Montrer que ces deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires dans E .

3. On pose

$$\begin{cases} \vec{I} &= \frac{1}{3}(-2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}), \\ \vec{J} &= \frac{1}{3}(2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}). \end{cases}$$

Démontrer que (\vec{I}, \vec{J}) est une base orthonormée de $\text{Im } \varphi$ et que $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{\omega})$ est une base orthonormée de E .

(Dans la suite du problème, on notera P l'espace $\text{Im } \varphi$, et on orientera P à l'aide de la base orthonormée directe (\vec{I}, \vec{J}) .)

4. On note φ_1 l'endomorphisme de P défini par

$$(\forall \vec{u} \in P), \quad \varphi_1(\vec{u}) = \varphi(\vec{u}).$$

Déterminer la matrice de φ_1 dans la base (\vec{I}, \vec{J}) .

5. Démontrer qu'il existe une projection vectorielle Q de E , telle que, pour tout vecteur \vec{u} de E , on ait :

$$\varphi(\vec{u}) = \varphi_1[Q(\vec{u})].$$

Partie B

Soit \mathcal{E} un espace affine euclidien associé à E , de repère orthonormé $R = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note R' le repère orthonormé $R' = (O; \vec{I}, \vec{J}, \vec{\omega})$.
 f est l'application affine de \mathcal{E} dans \mathcal{E} , laissant le point O invariant, et d'endomorphisme associé φ . \mathcal{D} est le plan affine de repère orthonormé direct $(O; \vec{I}, \vec{J})$.

1. Déterminer $f(\mathcal{E})$, image de \mathcal{E} par f .
2. Quel est l'ensemble \mathcal{D} des points M de \mathcal{E} , ayant le point O pour image.
 \mathcal{D}' étant une droite parallèle à \mathcal{D} , coupant \mathcal{D} en A , quelle est l'image de \mathcal{D}' par f .