Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Toulouse septembre 1985 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x telle que :

$$\left\{\begin{array}{lll} f(x) = -x & \text{si} & x \leqslant 0\\ f(x) = -x\ln x & \text{si} & 0 < x \leqslant \text{e}\\ f(x) = \text{e} - 2x & \text{si} & x > \text{e}.\end{array}\right.$$

1. **a.** Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

   b. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé (unité : 2 cm).

2. Soit α un nombre réel de l'intervalle $]0~;~1]$.

   a. Calculer $\displaystyle\int_{\alpha}^{1} f(x)\,\text{d}x$. (On pourra faire une intégration par parties.)

   b. En déduire l'aire de l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x~;~y)$ tels que

   $$\left\{\begin{array}{ccccc}\alpha & \leqslant & x & \leqslant & 1\\ 0 & \leqslant & y & \leqslant & f(x)\end{array}\right.$$

   (On donnera le résultat en cm^2.)

   c. Cette aire admet-elle une limite lorsque α tend vers 0 ?
   ln désigne la fonction logarithme népérien.

EXERCICE 2 **4 points**

Étant donnés deux points distincts F et F$'$ du plan P, dans tout cet exercice, on appelle ellipse de foyers F et F$'$ l'ensemble des points N de P tels que : NF + NF$'$ = $2a$ où a est un réel strictement positif vérifiant $2a >$ FF$'$.
Soit B et F deux points donnés distincts du plan.

1. Quel est l'ensemble C des points O tels qu'il existe une ellipse de centre O, vérifiant les deux conditions suivantes :
   (i) ses deux foyers sont distincts et l'un d'eux est F.
   (ii) B est l'un des sommets du petit axe.
2. Quel est, pour ces ellipses, l'ensemble des foyers distincts de F.
3. Pour une ellipse E vérifiant les conditions (i) et (ii) la droite BF$'$ recoupe E en un point M distinct de B. Montrer que les demi-droites F$'$B et F$'$M sont opposées. Montrer que M reste situé sur une ellipse fixe quand E varie.

PROBLÈME **12 points**

On se propose d'étudier l'effet d'une similitude sur une configuration géométrique plane

Partie A

1. **a.** Résoudre dans C l'équation :

$$8z^3 - 8(1+\mathrm{i})z^2 + 6\mathrm{i}z + (1-\mathrm{i}) = 0,$$

sachant qu'elle admet une solution réelle.

b. Représenter les images A, B, C des solutions dans le plan complexe de façon que le repère $\left(\mathrm{O}\,;\ \overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$ soit de sens direct.
Quelle est la nature du quadrilatère OABC ?

2. Soit s la similitude directe de centre O, de rapport $\sqrt{2}$, d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{4}$ (unité : le radian).

a. Faire une figure représentant les images du carré OABC par :

$$s,\quad s^2 = s\circ s,\quad s^3 = s\circ s^2,\quad s^4 = s\circ s^3.$$

(Aucune justification n'est demandée.)

b. Soit M le point de coordonnées $(x\,;\ y)$ et M$'$ celui de coordonnées $\left(x'\,;\ y'\right)$; exprimer x' et y' en fonction de x et de y lorsque : M$'$ = s(M).

c. Déterminer l'image D_1 de la droite (BC) par s et en donner une équation cartésienne.

d. Même question pour D'_1 image de la droite (BC) par s^2.

3. Soit E l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x\,;\ y)$ vérifient

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}$$

On note u_0 l'aire de E, u_1 l'aire de s(E). Plus généralement on note u_n l'aire de s^n(E) pour n entier naturel.
Quelle est l'expression de u_n en fonction de n et quelle est la nature de la suite (u_n) ?
Cette suite converge-t-elle ?

Partie B

On étudiera ici une courbe et des problèmes associés.

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x telle que

$$f(x) = x + \sin \pi x.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans P.

1. **a.** Démontrer qu'il existe au moins une translation t dont on précisera le vecteur et telle que $t(\mathscr{C}) = \mathscr{C}$.

b. Démontrer que $\mathscr{C}$ admet au moins un centre de symétrie.

2. Soit f_1 la restriction de f à $[0\,;\,1]$. Soit Γ_1 la courbe représentative de f_1 dans P.
Étudier le sens de variation de f_1 et tracer la courbe Γ_1. Préciser les tangentes à la courbe Γ_1 aux points d'abscisses 0, $\dfrac{1}{2}$ et 1.

3. **a.** Montrer que pour tout x réel on a la double inégalité

$$(1) \qquad x - 1 \leqslant f(x) \leqslant x + 1.$$

b. Quelle est la limite de f quand x tend vers $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$).

4. **a.** Interpréter géométriquement la double inégalité (1).

b. Tracer la courbe $\mathscr{C}$; préciser en particulier les tangentes aux points d'intersections de $\mathscr{C}$ avec D_1 (D_1 a été définie au A, 2., c.)

5. **a.** Calculer l'aire de la partie du plan définie par :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 0 & \leqslant & x & \leqslant & 1 \\ 0 & \leqslant & y & \leqslant & f(x) \end{array}\right.$$

b. Soit $S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}\left[\frac{p}{n} + \sin\frac{p}{n}\pi\right]$.

Déduire du a. la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.