∽ Baccalauréat Toulouse juin 1966 ∾
Mathématiques élémentaires

EXERCICE 1

1. Étudier la variation de la fonction

$$y = \frac{x^2 - 2ax}{a - x}$$

(a : nombre positif fixe) et construire sa courbe représentative, (C), dans un repère orthonormé.

Vérifier que (C) possède un centre de symétrie.

Soit M le point de (C) d'abscisse $\overline{\text{OH}} = \dfrac{3a}{2}$; calculer, en fonction de a, l'aire du domaine limité par Ox, l'ordonnée HM et l'arc de (C) passant par M.

2. On pose $a = 3$ dans la fonction étudiée au 1. Trouver les points de (C) dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

EXERCICE 2

Dans le plan (P) rapporté à un repère orthonormé $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$, on donne, sur l'axe $x'\text{O}x$, le point A d'abscisse $2a$ ($a > 0$).

1. Pour chaque point M(x ; y) du plan, on recherche tous les points M$'\left(x' ; y'\right)$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{\text{OM}}$, $\overrightarrow{\text{OM}'}$, $\overrightarrow{\text{AM}}$ et $\overrightarrow{\text{AM}'}$, qui peuvent éventuellement être nuls, satisfont aux conditions suivantes :

— le produit scalaire $\overrightarrow{\text{OM}} \cdot \overrightarrow{\text{OM}'}$ est nul ;

— les deux vecteurs $\overrightarrow{\text{AM}}$ et $\overrightarrow{\text{AM}'}$ sont colinéaires.

Discuter analytiquement, suivant la position de M dans (P), l'existence et la position des points M$'$.

M$'$ est unique lorsque M appartient à un ensemble E do points du plan (P), que l'on définira. Montrer qu'alors

$$x = \frac{2ay'^2}{x'^2 + y'^2 - 2ax'}, \quad y = \frac{-2ax'y'}{x'^2 + y'^2 - 2ax'}.$$

Donner une construction de M$'$, connaissant M.

2. On définit sur E la transformation ponctuelle T appliquant E dans (P), qui à tout point M de E fait correspondre le point M$'$.

Cette image M$'$ peut-elle être sur Ox ? ; sur Oy ? ; sur le cercle de diamètre OA ?

Soit (D) une droite quelconque passant par O ; quel est l'ensemble des images M$'$ des points de l'ensemble (D) $\cap$ E ?

Discuter suivant la position de (D) ; étudier M$'$ lorsque M tend vers O en restant sur (D).

Soit, de même, (Δ) une droite passant par A ; quel est l'ensemble transformé par T de l'ensemble (Δ) $\cap$ E ?

Discuter suivant la position de (Δ) ; étudier M$'$ lorsque M tend vers A en restant sur (Δ).

3. Trouver la relation qui lie les coordonnées des images, M$'$, des points de l'ensemble $(\Omega) \cap$ E, lorsque (Ω) est le cercle de centre ω, d'équation

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x = 0 \quad (\lambda \neq a).$$

En déduire que ces points M$'$ sont sur un cercle $\left(\Omega'\right)$ dont le centre, ω', situé sur Ox, a pour abscisse $\dfrac{\lambda a}{\lambda - a}$.

Calculer $\overline{\omega\omega'}$. Retrouver géométriquement le résultat obtenu ci-dessus.

4. Dans cette question, M se déplace sur un cercle (C) donné passant par O et A.

Déterminer l'ensemble des images M$'$ des points de l'ensemble (C) $\cap$ E.

Montrer que cet ensemble est sur un cercle (C$'$) déduit de (C) par une similitude directe, dont on précisera les éléments ; en déduire la construction de (C).

Quel est le lieu du centre, P$'$, d'un cercle variable (P$'$) tangent à (C) et à (C$'$), les contacts étant de natures différentes ?

Montrer que la droite passant par les points de contact pivote autour d'un point fixe, U.

Que peut-on dire de la puissance de U par rapport au cercle (P$'$) ?

5. Soit Oz un troisième axe perpendiculaire au plan xOy et tel que le repère Oxyz soit orthonormé direct.

On donne le point S$\left(x = -\dfrac{2a}{3}\ ;\ y = 0\ ;\ z = \dfrac{4a}{3}\right)$.

Dans le plan xOy on trace le cercle de diamètre OA et de centre B. Soit I le point de ce cercle tel que $\left(\overrightarrow{\text{B}x}\ ,\ \overrightarrow{\text{BI}}\right) = \theta$.

Trouver analytiquement le lieu du point d'intersection de la droite SI et du plan yOz lorsque θ varie.

Vérifier, géométriquement, le résultat, en utilisant la sphère passant par S et contenant le cercle du plan xOy de diamètre OA.