

🌀 Baccalauréat Toulouse juin 1966 🌀
Mathématiques élémentaires

EXERCICE 1

1. Étudier la variation de la fonction

$$y = \frac{x^2 - 2ax}{a - x}$$

(a : nombre positif fixe) et construire sa courbe représentative, (C), dans un repère orthonormé.

Vérifier que (C) possède un centre de symétrie.

Soit M le point de (C) d'abscisse $\overline{OH} = \frac{3a}{2}$; calculer, en fonction de a , l'aire du domaine limité par Ox, l'ordonnée HM et l'arc de (C) passant par M.

2. On pose $a = 3$ dans la fonction étudiée au 1. Trouver les points de (C) dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

EXERCICE 2

Dans le plan (P) rapporté à un repère orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$, on donne, sur l'axe $x'Ox$, le point A d'abscisse $2a$ ($a > 0$).

1. Pour chaque point $M(x; y)$ du plan, on recherche tous les points $M'(x'; y')$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OM'}$, $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AM'}$, qui peuvent éventuellement être nuls, satisfont aux conditions suivantes :
- le produit scalaire $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'}$ est nul;
 - les deux vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AM'}$ sont colinéaires.

Discuter analytiquement, suivant la position de M dans (P), l'existence et la position des points M' .

M' est unique lorsque M appartient à un ensemble E de points du plan (P), que l'on définira. Montrer qu'alors

$$x = \frac{2ay'^2}{x'^2 + y'^2 - 2ax'}, \quad y = \frac{-2ax'y'}{x'^2 + y'^2 - 2ax'}.$$

Donner une construction de M' , connaissant M.

2. On définit sur E la transformation ponctuelle T appliquant E dans (P), qui à tout point M de E fait correspondre le point M' .

Cette image M' peut-elle être sur Ox?; sur Oy?; sur le cercle de diamètre OA?

Soit (D) une droite quelconque passant par O; quel est l'ensemble des images M' des points de l'ensemble (D) $\cap$ E?

Discuter suivant la position de (D); étudier M' lorsque M tend vers O en restant sur (D).

Soit, de même, (Δ) une droite passant par A; quel est l'ensemble transformé par T de l'ensemble $(\Delta) \cap E$?

Discuter suivant la position de (Δ) ; étudier M' lorsque M tend vers A en restant sur (Δ) .

3. Trouver la relation qui lie les coordonnées des images, M' , des points de l'ensemble $(\Omega) \cap E$, lorsque (Ω) est le cercle de centre ω , d'équation

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x = 0 \quad (\lambda \neq a).$$

En déduire que ces points M' sont sur un cercle (Ω') dont le centre, ω' , situé sur Ox, a pour abscisse $\frac{\lambda a}{\lambda - a}$.

Calculer $\overline{\omega\omega'}$. Retrouver géométriquement le résultat obtenu ci-dessus.

4. Dans cette question, M se déplace sur un cercle (C) donné passant par O et A.

Déterminer l'ensemble des images M' des points de l'ensemble $(C) \cap E$.

Montrer que cet ensemble est sur un cercle (C') déduit de (C) par une similitude directe, dont on précisera les éléments; en déduire la construction de (C).

Quel est le lieu du centre, P' , d'un cercle variable (P') tangent à (C) et à (C') , les contacts étant de natures différentes?

Montrer que la droite passant par les points de contact pivote autour d'un point fixe, U.

Que peut-on dire de la puissance de U par rapport au cercle (P') ?

5. Soit Oz un troisième axe perpendiculaire au plan xOy et tel que le repère Ox y z soit orthonormé direct.

On donne le point $S \left(x = -\frac{2a}{3}; y = 0; z = \frac{4a}{3} \right)$.

Dans le plan xOy on trace le cercle de diamètre OA et de centre B. Soit I le point de ce cercle tel que $(\overrightarrow{Bx}, \overrightarrow{BI}) = \theta$.

Trouver analytiquement le lieu du point d'intersection de la droite SI et du plan yOz lorsque θ varie.

Vérifier, géométriquement, le résultat, en utilisant la sphère passant par S et contenant le cercle du plan xOy de diamètre OA.