Toulouse juin 1967
Baccalauréat mathématiques élémentaires

EXERCICE 1

1. Former le tableau des diviseurs du nombre 504.
2. Montrer qu'il existe un nombre inférieur à 504 et possédant autant de diviseurs que 504.
3. Déterminer un entier naturel n de telle manière que les racines de l'équation $x^2 - 2nx + 504 = 0$ soient des entiers naturels.
   (On ne demande qu'un seul entier n répondant à la question.)

EXERCICE 2

Les coordonnées d'un point M sont données, dans un repère orthonormé, en fonction du temps, t, par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& t + 2a\dfrac{\mathrm{e}^{2t}}{\mathrm{e}^{2t}+1} - b\dfrac{\mathrm{e}^{2t}-1}{\mathrm{e}^{2t}+1}\\ y &=& a\dfrac{\mathrm{e}^{2t}-1}{\mathrm{e}^{2t}+1} + 2b\dfrac{\mathrm{e}^{2t}}{\mathrm{e}^{2t}+1}\end{array}\right. ,$$

où a et b sont deux constantes indépendantes de t.

1. Trouver les composantes du vecteur vitesse de M à l'instant t.
2. Calculer a et b pour que le vecteur vitesse du point M soit nul à un instant donné t_0.

EXERCICE 3

Soit (H) l'hyperbole dont l'équation, par rapport à un repère orthonormé $(\mathrm{O}x,\mathrm{O}y)$, est

$$y = \frac{1}{x}$$

A, B, M sont les points de (H) d'abscisses respectives $a, -a, \lambda$; on suppose a positif.

1. Comparer les angles de droites $(\mathrm{O}x,\ \mathrm{A}M)$ et $(\mathrm{O}x,\ \mathrm{B}M)$.
   En déduire, lorsque A, M, B sont distincts, la direction des bissectrices de l'angle de droites $(M\mathrm{B},\ M\mathrm{A})$.
   Δ étant la tangente en A à (H), quelles sont les bissectrices de l'angle $(\Delta,\ \mathrm{AB})$?
2. Calculer la tangente, z, de l'angle de droites $(M\mathrm{B},\ M\mathrm{A})$ en fonction de a et λ ; étudier les variations de z quand, a étant fixe, λ varie.
   Soit φ un nombre donné ; montrer qu'il existe en général deux points, M_1 et M_2 de (H), distincts de A et B, tels que
   $$(M_1\mathrm{B},\ M_1\mathrm{A}) = (M_2\mathrm{B},\ M_2\mathrm{A}) = \varphi \quad (\text{mod.}\,\pi).$$
   Comparer alors les directions de $\mathrm{A}M_1$ et $\mathrm{A}M_2$?
   Peut-on choisir a pour que, quel que soit φ, l'on ait $\mathrm{O}M_1 = \mathrm{O}M_2$?
3. On suppose désormais que $a = 1$, λ quelconque.
   La droite $\mathrm{B}M$ coupe le cercle de diamètre AB en M' et la tangente en A à (H) en T.
   Montrer, par exemple en utilisant les résultats de la question 1, que la division $(\mathrm{B},\ T, M, M')$ est harmonique.

4. A et B sont encore les points de (H) d'abscisses respectives $+1$ et -1 ; Δ est la tangente en A à (H).

Soit $\mathcal{T}$ la transformation ponctuelle plane qui, au point P, associe le point P' tel que :

- B, P, P' soient alignés,
- les droites AP et AP' soient symétriques par rapport à Δ.

Montrer que, si BP coupe Δ en R, la division (B, R, P, P') est harmonique.

La transformation $\mathcal{T}$ est-elle définie pour tous les points du plan ?

Quel est le transformé du point P' par $\mathcal{T}$?

Quelle est l'image par $\mathcal{T}$ de la droite Δ ?

Dans un repère orthonormé $(\text{O}X,\ \text{O}Y)$ tel que $\overrightarrow{\text{OA}}$ soit le vecteur unitaire de OX, écrire les coordonnées $\left(X' \ ;\ Y'\right)$ du point P' en fonction des coordonnées $(X \ ;\ Y)$ du point P. Quelle est l'image par $\mathcal{T}$ de la droite d'équation

$$uX + vY + h = 0?$$

Que peut-on dire de la tangente en M à l'hyperbole (H) et de la tangente en M' au cercle de diamètre AB ? (M et M' sont les points définis dans la question 3.)