Durée : 4 heures

Baccalauréat Toulouse septembre 1966
série mathématiques élémentaires

I.

Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre entier positif soit divisible par 30.
Application : Démontrer que, quel que soit l'entier positif n, le nombre $n(2n+1)(3n+1)(4n+1)(6n+1)$ est divisible par 30.

II.

Soit un axe $x'x$, un point O de cet axe, un vecteur $\overrightarrow{\mathrm{V}}$ parallèle a $x'x$ et de mesure algébrique $u \neq 0$.
On considere la translation (T) définie par $\overrightarrow{\mathrm{V}}$ et l'homothétie (H) de centre O et de rapport k réel ($k \neq 0$ et $k \neq 1$).
Quelle est la nature de la transformation (T) $\circ$ (H) $\circ$ (T) ?
Préciser les éléments servant a la définir.

III.

Soit (C_m) la courbe définie, par rapport a un repère orthonormé $\left(x'\mathrm{O}x,\ y"\mathrm{O}y\right)$, par l'équation

$$y^2 = mx^2 - (2m+1)x - 3(m-1),$$

où $m est un paramètre réel.$

1. Montrer que, quel que soit m, les courbes (C_m) passent par un point fixe, que l'on précisera.
2. Etudier completement les cas $m = 0$, $m = 1$, $m = -1$, $m = -2$.
   Dessiner, sur le meme graphique, les quatre courbes (C_m) correspondantes, en précisant les principaux éléments géométriques qui les définissent. (Unité de longueur : 1 cm.)
   Calculer l'aire du domaine limité par Ox, Oy et l'arc de (C_0) contenu dans le premier quadrant.
   Former les équations des tangentes a (C_1) et (C_{-1}) au point commun, A, d'abscisse positive et d'ordonnée positive.
   Calculer l'angle de ces tangentes avec la précision des tables de logarithmes à cinq décimales et en prenant pour unité le degré.
3. Lorsque m est différent de zéro, effectuer un changement de repère : $x = x_0 + X$, $y = Y$, tel que, dans le nouveau système d'axes, ω X, ΩY, l'équation de (C_m) prenne la forme $Y^2 = mX^2 + k$.
   Déterminer, en fonction de m, x_0 et le terme k.
4. Montrer que, si $m > 0$, (C_m) est. une. hyperbole, dont on précisera l'axe focal.
   Calculer e^2 (carré de l'excentricité) en fonction de m.
   Donner, dans le repere $\left(x'\mathrm{O}x,\ y'\mathrm{O}y\right)$, les équations de ses asymptotes.
   Soit I le point de coordonnées $x = \dfrac{1}{2}$, $y = 0$ et H la projection orthogonale de I sur l'asymptote de pente positive. Déterminer l'ensemble des points H.
   (On posera $\sqrt{m} = t$)
   Quelle est l'enveloppe de cette asymptote lorsque m varie ?

5. Montrer que, si $m < 0$, v est, en général, une ellipse.
Préciser l'axe focal, suivant les valeurs de m, et calculer e^2, en fonction de ce paramètre, dans chaque cas correspondant.
On désigne par B le sommet situé sur l'axe parallèle à $y'\text{O}y$ et d'ordonnée positive. Former, dans le repère $\left(x'\text{O}x,\ y'\text{O}y\right)$, l'équation de l'ensemble des points B.
Étudier et construire son graphe sur la figure faite au **2.**