

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat Toulouse septembre 1966 ∞
série mathématiques élémentaires

I.

Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre entier positif soit divisible par 30.

Application : Démontrer que, quel que soit l'entier positif n , le nombre $n(2n+1)(3n+1)(4n+1)(6n+1)$ est divisible par 30.

II.

Soit un axe $x'x$, un point O de cet axe, un vecteur $\vec{V}$ parallèle à $x'x$ et de mesure algébrique $u \neq 0$.

On considère la translation (T) définie par $\vec{V}$ et l'homothétie (H) de centre O et de rapport k réel ($k \neq 0$ et $k \neq 1$).

Quelle est la nature de la transformation $(T) \circ (H) \circ (T)$?

Préciser les éléments servant à la définir.

III.

Soit (C_m) la courbe définie, par rapport à un repère orthonormé $(x'Ox, y'Oy)$, par l'équation

$$y^2 = mx^2 - (2m+1)x - 3(m-1),$$

où m est un paramètre réel.

1. Montrer que, quel que soit m , les courbes (C_m) passent par un point fixe, que l'on précisera.

2. Étudier complètement les cas $m = 0$, $m = 1$, $m = -1$, $m = -2$.

Dessiner, sur le même graphique, les quatre courbes (C_m) correspondantes, en précisant les principaux éléments géométriques qui les définissent. (Unité de longueur : 1 cm.)

Calculer l'aire du domaine limité par Ox , Oy et l'arc de (C_0) contenu dans le premier quadrant.

Former les équations des tangentes à (C_1) et (C_{-1}) au point commun, A , d'abscisse positive et d'ordonnée positive.

Calculer l'angle de ces tangentes avec la précision des tables de logarithmes à cinq décimales et en prenant pour unité le degré.

3. Lorsque m est différent de zéro, effectuer un changement de repère : $x = x_0 + X$, $y = Y$, tel que, dans le nouveau système d'axes, $\omega X, \Omega Y$, l'équation de (C_m) prenne la forme $Y^2 = mX^2 + k$.

Déterminer, en fonction de m , x_0 et le terme k .

4. Montrer que, si $m > 0$, (C_m) est une hyperbole, dont on précisera l'axe focal.
Calculer e^2 (carré de l'excentricité) en fonction de m .
Donner, dans le repère $(x'Ox, y'Oy)$, les équations de ses asymptotes.
Soit I le point de coordonnées $x = \frac{1}{2}$, $y = 0$ et H la projection orthogonale de I sur l'asymptote de pente positive. Déterminer l'ensemble des points H.
(On posera $\sqrt{m} = t$)
Quelle est l'enveloppe de cette asymptote lorsque m varie?
5. Montrer que, si $m < 0$, v est, en général, une ellipse.
Préciser l'axe focal, suivant les valeurs de m , et calculer e^2 , en fonction de ce paramètre, dans chaque cas correspondant.
On désigne par B le sommet situé sur l'axe parallèle à $y'Oy$ et d'ordonnée positive.
Former, dans le repère $(x'Ox, y'Oy)$, l'équation de l'ensemble des points B.
Étudier et construire son graphe sur la figure faite au 2.