∽ Baccalauréat Toulouse septembre 1967 ∾
Mathématiques élémentaires

I.

On considère la fonction définie par

$$y = \frac{x^2 + 3x + 2}{x}.$$

Étudier ses variations.
Construire son graphique, (C).
Celui-ci coupe l'axe des x en deux points, A et B.
Calculer l'aire du domaine compris entre l'arc AB de (C) et le segment de droite AB.

II.

Soit (O) un cercle de centre O de rayon R, (D) la tangente au cercle (0) en un point A.
On désigne par F la famille des cercles tangents à la fois à (O) et à (D) en des points distincts de A.

1. En utilisant l'inversion de pôle A et de puissance $4\mathrm{R}^2$ construire un cercle de la famille F.
2. Si (Γ) est un cercle de la famille F, on appelle M et P ses points de contact respectivement avec (O) et (D).
   Montrer que la droite MP passe par un point fixe lorsque (Γ) varie.
3. Si deux cercles de la famille F varient en restant tangents entre eux, quel est l'ensemble de leurs points de contact ?

III.

Soit la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2}.$$

1. Étudier ses variations et construire son graphique, (C), dans un repère orthonormé. On désignera par A le point de (C) d'abscisse 2.
2. Soit un point M (distinct de A) de (C), d'abscisse λ.
   Déterminer l'abscisse du point T où la tangente en M à (C) recoupe (C).
3. Soit deux points distincts, M_1 et M_2 de (C), d'abscisses respectives x_1 et x_2 (on supposera $x_1x_2 \neq x_1 + x_2$).
   Déterminer, l'abscisse, p du point P, de (C) où la droite $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2$ recoupe (C). (Il suffit d'écrire que les coefficients directeurs de PM_1 et de PM_2 sont égaux.)
   Que peut-on dire de la droite $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2$ si $x_1x_2 = x_1 + x_2$?
   Èn déduire qu'une condition nécessaire et suffisante pour que trois points (deux à deux distincts), M_1, M_2, M_3, de (C) d'abscisses respectives x_1, x_2, x_3, soient alignés est

   $$(1) \qquad x_1x_2x_3 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1.$$

   Montrer que, si, dans la relation (1), on pose

   $$x_1 = x_2 = \lambda \quad (\lambda \neq 2),$$

   la valeur obtenue pour x_3 est la même que l'abscisse du point T de la question **2.**

4. Montrer que, si trois points, M_1, M_2, M_3 de (C) (distincts de A) sont alignés, les points T_1, T_2, T_3 où les tangentes en ces points recoupent (C) sont également alignés.
5. Montrer qu'il existe un seul nombre réel, s, non nul tel que la relation (1) soit vérifiée lorsque l'on pose $x_1 = x_2 = x_3 = s$.

   Donner l'équation de la tangente (D_s) à la courbe (C) au point S de (C) d'abscisse s.

   Vérifier que les points de (C) d'abscisse supérieure à celle de S sont situés dans un même demi-plan limité par (D_s) et que les points de (C) d'abscisse inférieure à celle de S sont situés dans l'autre demi-plan.

N. B. - Les questions **4.** et **5.** pourront être abordées, même si les précédentes n'ont pas été traitées. Il suffira d'utiliser la relation (1).