Baccalauréat Tunisie juin 1965
série mathématiques élémentaires et mathématiques et technique

I.

1. On donne la fonction

$$f_a(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+ax+1},$$

où a est un nombre réel donné.
Pour quelles valeurs de a cette fonction est-elle définie quelle que soit la valeur attribuée à x ?
En supposant qu'il en est ainsi, étudier les variations de cette fonction.

2. Construire la courbe C_0 représentant la fonction f_0 correspondant à $a = 0$.
Montrer que la courbe C_0 a un centre de symétrie, A.
Déterminer la tangente en A à la courbe.
Soit M le point de C_0 représentant le maximum de la fonction f_0.
Calculer l'aire de la surface comprise entre l'arc AM de C_0 et sa corde.
(On montrera d'abord que $f_0(x)$ peut s'écrire sous la forme $m + \dfrac{px}{x^2+1}$ m et p étant deux nombres, que l'on déterminera).

3. En supposant toujours que a est choisi de façon que la fonction f_a soit définie pour toute valeur de x, déduire de la variation de f_a la variation de la fonction g_a telle que $g_a(x) = \sqrt{f_a(x)}$.
Construire la courbe C'_0 représentant la fonction g_0.
Déterminer les tangentes à la courbe C'_0 aux points d'abscisses -1, 0 et 1.
La fonction g_0 est-elle dérivable pour $x = -1$?
Que peut-on dire du point d'abscisse -1 de la courbe C'_0 ?

II.

On donne un cercle fixe (O) tangent en A à une droite fixe (D).
Soit BC le diamètre de (O) parallèle à (D). M est un point variable de la droite (D).
Les droites MB et MC recoupent respectivement le cercle (O) en B′ et C′.

1. Soit N l'intersection des droites BC′ et B′C.
Montrer que les quatre points M, N, B′ et C′ sont sur un même cercle, de centre I.
Quel est l'homologue du cercle (I) dans l'inversion de pôle M et de puissance MA^2 ?
En déduire que le cercle (I) est orthogonal au cercle (O) et tangent à la droite (D) et au cercle de diamètre OA.
Définir le point de contact, T, du cercle (I) et du cercle de diamètre OA.

2. Soit F le milieu de OA. Comparer les distances du point I au point F et à la droite (D).
En déduire le lieu du point I lorsque M varie sur (D).
On définit un repère orthonormé $x\text{A}y$ de la façon suivante : Ax est porté par (D), Ay est porté par la droite AO et le vecteur unitaire de Ay est le vecteur AG.
Écrire dans ce repère l'équation du lieu géométrique de I.
Montrer que N est l'homologue de I dans une affinité orthogonale, que l'on déterminera.
En déduire le lieu géométrique de N.

3. Montrer que les droites BC, NA, et B′C′ sont concourantes en un point P. Soit Q l'intersection des droites B′C′ et MN.
Montrer que les points P et Q sont conjugués par rapport au cercle (O).