Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Vénézuela novembre 1965 ∽

Série mathématiques élémentaires

1

Mettre le nombre complexe

$$z = \frac{21(5\text{i} - \sqrt{3})}{2 - \text{i}\sqrt{3}}$$

souS la forme trigonométrique

$$z = \rho(\cos\theta + \text{i}\sin\theta).$$

II

On considère les nombres complexes

$$\begin{array}{c} z_1 = \rho_1\left(\cos\theta_1 + \text{i}\sin\theta_1\right), \\ z_2 = \rho_2\left(\cos\theta_2 + \text{i}\sin\theta_2\right), \\ z_2 = \rho_1\left(\cos\theta_2 + \text{i}\sin\theta_2\right) \end{array}$$

et l'on suppose que, dans cet ordre, ils forment une progression géométrique de raison q, entier au moins égal à 2.
Comparer les arguments, θ_1, θ_2, θ_3, des nombres complexes z_1, z_2, z_3.
Déterminer ces trois nombres z_1, z_2, z_3 sachant, de plus, que

$$z_1 + z_2 + z_3 = \frac{21(5\text{i} - \sqrt{3})}{2 - \text{i}\sqrt{3}}$$

et que les modules, ρ_1, ρ_2, ρ_3 des nombre, z_1, z_2, et z_3 sont des entiers.

III

Le plan étant rapporté à un système d'axes orthonormé $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$, on marque les points $\omega\left(+\frac{1}{2}\ ;\ 0\right)$ et F(+1 ; 0) et l'on trace la circonférence (C) de centre ω et passant par le point F.
Soit $M(x\ ;\ y)$ un point quelconque de (C) ; on appelle φ l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\text{O}\omega}, \overrightarrow{\text{O}M}\right)$ défini à $2k\pi$ près.

Partie A

1. On considère l'inversion de pôle F et de puissance 1.
   Déterminer *géométriquement* le centre de la circonférence inverse de la tangente en M à (C).
   Trouver l'équation du lieu de ce centre quand M décrit (C).
2. On considère la parabole (P) d'équation

   $$y2 = 2x - 1;$$

   FM coupe la directrice de cette parabole en K ; la parallèle à l'axe $x'\text{O}x$ menée par K coupe la parabole (P) en I. Déterminer géométriquement l'inverse de la tangente en I à la parabole (P).

Partie A

À tout point $M(x\,;\;y)$ appartenant au cercle (C) on fait correspondre le point $M'(X\,;\;Y)$ défini de la manière suivante :

$$\left\{\begin{array}{l c l} X &=& \sin^2\varphi - x,\\ Y &=& \dfrac{-2y\cos^2\varphi}{1+\cos^2\varphi}\end{array}\right.$$

1. Calculer le rapport $\dfrac{X}{Y}$ en fonction de tg φ et montrer que le support du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ passe par un point fixe, que l'on déterminera, quand M décrit le cercle (C).

2. Trouuver l'équation de la courbe, ensemble des points M' quand $M(x\,;\;y)$ se déplace sur le cercle (C) avec $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$.

3. Étudier les variations de la fonction

$$y = x\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$$

et tracer son graphe (Γ).

4. Pour cette partie de problème, nous supposerons que l'unité choisie sur les axes est le centimètre.

Le graphe (Γ) de la fonction $\text{y} = \text{x}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ coupe l'axe $x'\text{O}x$ en un point A autre que l'origine. Quelle est l'abscisse, a, de ce point ?

On fait tourner le graphe autour de l'axe $x'\text{O}x$. L'arc OA du graphe (Γ) engendre dans cette rotation un solide de révolution (V). On coupe ce solide par un plan perpendiculaire à l'axe $x'\text{O}x$ en un point H d'abscisse x tel que $a < x < 0$.

Calculer en fonction de x l'aire, $S(x)$, de la section obtenue.

Calculer une primitive $V(x)$ de la fonction $S(x)$; en déduire le volume du solide (V), en admettant que le volume cherché est donné par la formule

$$\text{V} = \text{V}(0) - \text{V}(a).$$

On donne Log $2 \approx 0,69$.

N. B. - La partie A du problème est indépendante de la partie B. Les deux questions de la partie A sont indépendantes l'une de l'autre.

Les questions 3 et 4 de la partie B peuvent être traitées indépendamment des questions 1 et 2.