∽ Baccalauréat C Vientane juin 1977 ∾

EXERCICE 1 **4 POINTS**

1. Soit f et g deux fonctions numériques définies au moins dans un intervalle ouvert non vide de centre x_0. On sait que l'implication (1) :

$$\text{et}\quad\left.\begin{array}{c} f \text{ continue en } x_0\\ g \text{ continue en } x_0\\ g \text{ continue en } x_0\end{array}\right| \Longrightarrow fg \text{ continue en } x_0$$

est vraie.

L'implication (2)

$$fg \text{ discontinue en } x_0 \Longrightarrow \left|\begin{array}{c} f \text{ discontinue en } x_0\\ \text{ou}\\ g \text{ discontinue en } x_0\end{array}\right.$$

est-elle vraie ?

2. **a.** Soit F la fonction numérique définie dans $[0\,;\,1]$ par

$$\begin{array}{lcrcl} \forall x \in \left[0\,;\,\dfrac{1}{6}\right] & : & F(x) & = & 6x^2+x+1\\ \forall x \in \left[\dfrac{1}{6}\,;\,1\right] & : & F(x) & = & \dfrac{6x+3}{2x+5}\end{array}$$

Étudier la continuité de F en $\dfrac{1}{6}$.

b. Soit G et H les fonctions numériques définies par :

$$\forall x \in [0\,;\,] : \quad \begin{array}{lcl} G(x) & = & \cos 3\pi x\\ H(x) & = & \cos 4\pi x\end{array}$$

Étudier la continuité des fonctions produit FG et FH en $\dfrac{1}{6}$.

3. L'implication (3) :

$$fg \text{ continue en } x_0 \Longrightarrow \left|\begin{array}{c} f \text{ continue en } x_0\\ \text{et}\\ g \text{ continue en } x_0\end{array}\right.$$

est-elle vraie quelles que soient les fonctions numériques f et g définies au moins dans un intervalle ouvert non vide de centre x_0 ?

EXERCICE 2 **4 POINTS**

On considère l'application f :

$$f\ \left|\begin{array}{lcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C}\quad (\mathbb{C} \text{ ensemble des nombres complexes})\\ z & \longmapsto & z^4-z^3+z^2+2\end{array}\right.$$

1. **a.** Montrer que si l'équation (1) : $f(z) = 0$ admet pour racine le nombre complexe α , elle admet aussi pour racine $\overline{\alpha}$.

b. Montrer que $1+\mathrm{i}$ et $-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sont racines de l'équation (1) .

c. Quel est l'ensemble des solutions de l'équation (1) ?
En déduire une factorisation de $f(z)$.

2. Montrer que f est le produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels.

PROBLÈME **4 POINTS**

Soit un plan vectoriel euclidien $\mathscr{P}$ rapporté à une base orthonormée $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$. On rappelle que l'ensemble $\mathscr{L}(\mathscr{P})$ des endomorphismes de $\mathscr{P}$, (applications linéaires de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$), muni de l'addition et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Partie A

1. Soit p, q, s les éléments de $\mathscr{L}(\mathscr{P})$ définies dans la base $\left(\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} p\left(\vec{\imath}\right) & = & \vec{\imath} \\ p\left(\vec{\jmath}\right) & = & \vec{0}\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} q\left(\vec{\imath}\right) & = & \vec{0} \\ q\left(\vec{\jmath}\right) & = & \vec{\imath}\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} s\left(\vec{\imath}\right) & = & \vec{\jmath} \\ s\left(\vec{\jmath}\right) & = & \vec{\imath}\end{array}\right.$$

Montrer que p et q sont des projections. Quelle est la nature de s ?

2. Soit E le sous-espace de $\mathscr{L}(\mathscr{P})$ engendré par p, q, s. Quelle est la dimension de E ?

3. On note F le sous-ensemble de $\mathscr{L}(\mathscr{P})$ constitué par les endomorphismes f tels que $\vec{\imath}\cdot f\left(\vec{\jmath}\right) = \vec{\jmath}\cdot f\left(\vec{\imath}\right)$.

a. Montrer que f est élément de F si, et seulement si, sa matrice dans la base $\left(\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ est de la forme $\begin{pmatrix} a & b\\ b & d\end{pmatrix}$ où a, b, d désignent trois nombres réels.

b. Montrer que $F = E$.

4. Soit f un élément de F de matrice $\begin{pmatrix} a & b\\ b & d\end{pmatrix}$ où a, b, $d$dans la base $\left(\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$. À tout réel λ on associe l'ensemble E_λ des vecteurs $\vec{u}$ de $\mathscr{P}$ tels que $f\left(\vec{u}\right) = \lambda\vec{u}$.

a. Montrer que E_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{P}$.

b. Montrer qu'il existe en général deux valeurs distinctes λ_1 et λ_2 de λ pour lesquelles $E_\lambda \neq \left\{\vec{0}\right\}$.

c. Préciser la nature des endomorphismes correspondant aux cas d'exception.

5. a. Établir l'implication :

$$f \in F \Rightarrow \forall\vec{u} \in \mathscr{P}, \forall\vec{v} \in \mathscr{P},\ \vec{u}\cdot f\left(\vec{v}\right) = \vec{v}\cdot f\left(\vec{u}\right).$$

b. Si λ_1 et λ_2 sont les valeurs de λ (distinctes) trouvées au 4. b., montrer que E_{λ_1} et E_{λ_2} sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux.

Partie B

Dans cette question on étudie le cas particulier $f = p + 2s - 2q$.

1. Quelle est la matrice de f dans la base $\left(\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$? f est-elle bijective ?

2. Déterminer λ_1 et λ_2 (on choisira $\lambda_1 < \lambda_2$) et vérifier que E_{λ_1} et E_{λ_2} sont deux droites vectorielles orthogonales dont on donnera l'équation dans la base $\left(\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

On note $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ deux vecteurs unitaires de E_{λ_1} et E_{λ_2} respectivement. Quelle est la matrice de f dans la base orthonormée $\left(\overrightarrow{u_1},\,\overrightarrow{u_2}\right)$?

Partie C

On appelle P un plan affine euclidien associé au plan vectoriel $\mathscr{P}$ et soit O un point de $\mathscr{P}$.

1. Étudier la fonction g :

$$g : \left|\begin{array}{ccc} R & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2}{5}\left(-x^3 - 3\sqrt{-x^2+25}\right)\end{array}\right.$$

et tracer son graphique C dans le plan P rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. (On prendra 1 cm pour unité).

2. Soit φ l'application affine de P telle que son endomorphisme associé soit l'endomorphisme f étudié en B, et telle que $\varphi(0) = 0$.

a. Montrer que φ est bijective et déterminer analytiquement φ^{-1}.

b. Soit C la courbe d'équation $x^2 + y^2 - 5 = 0$ par rapport à $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. On appelle C' l'image de C par φ. Déterminer une équation de C' par rapport à $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

Montrer que C' est la réunion de C'_1 et d'une courbe C'_2 dont on déterminera une équation. Prouver que C'_1 et C'_2 sont symétriques par rapport à O. En déduire le tracé de C'.

c. Caractériser géométriquement la courbe C. Quelle est son équation dans le plan rapporté au repère $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$? En déduire une équation de C' par rapport à ce repère. Etudier alors la nature de C'. Quels sont les axes de symétrie de C' ? Les tracer sur la figure faite en b.