

Les voûtes

Jacques Chayé

Jacques Chayé a animé un atelier aux journées de La Rochelle intitulé « Constructions en géométrie dans l'espace ». PLOT le remercie d'avoir accepté de reprendre ici ses explications sur le croisement des voûtes romanes... Lors de votre prochaine visite d'un monument, levez les yeux et troquez votre guide habituel contre votre numéro de PLOT ! Envoûtement garanti.

CROISEMENT DE DEUX VOÛTES EN BERCEAU

VOÛTE EN BERCEAU

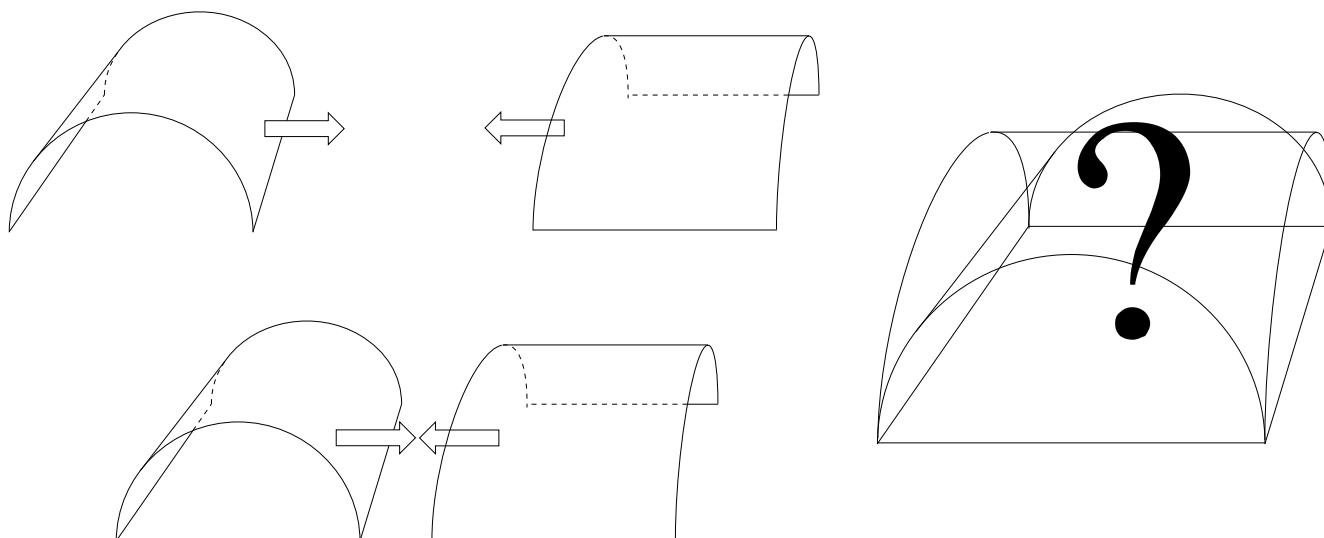
La nef de beaucoup d'églises romanes se termine en hauteur par une voûte semi-cylindrique dite encore « voûte en berceau ».

C'est par exemple le cas, comme on peut le voir sur la photo ci-contre, pour l'église de Saint-Savin-sur-Gartempe, dans la Vienne.



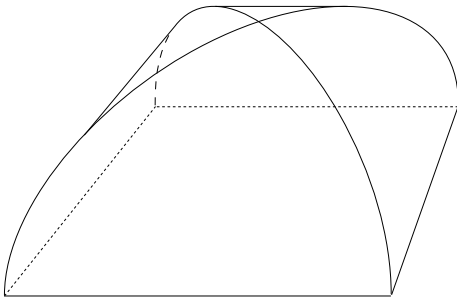
CROISEMENT DE DEUX VOÛTES EN BERCEAU

Quand deux voûtes en berceau de même hauteur se rencontrent à angle droit, quelles sont les solutions les plus couramment adoptées pour la partie commune ?



1. VOÛTES DE CLOÎTRE

On choisit de ne conserver de chaque voûte que la partie située à l'intérieur de l'autre.



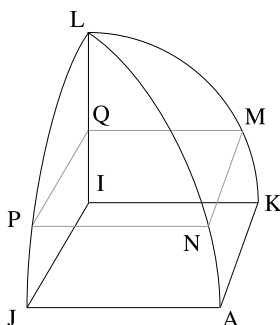
C'est le choix retenu pour la toiture des ailes est et ouest du château de Cheverny dans le Loir-et-Cher.



On reconnaît, entre ces deux ailes, le modèle du château de Moulinsart du Capitaine Haddock !

Volume V du solide sous la voûte de cloître

On suppose que chaque « tuile » composant la voûte est un demi-cylindre de révolution de rayon 1 et de hauteur 2. La figure ci-dessous représente le quart de ce solide.



Alors KAJI est un carré de côté 1.

APMEP - PLOT n° 27

Un plan horizontal détermine le carré MNPQ.

Posons $IQ = x$ ($x \in [0;1]$).

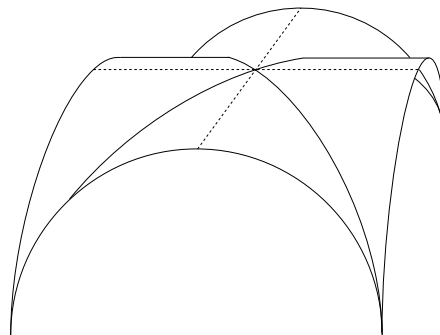
On a : $MQ = \sqrt{1-x^2}$.

L'aire du carré MNPQ est égale à $1-x^2$.

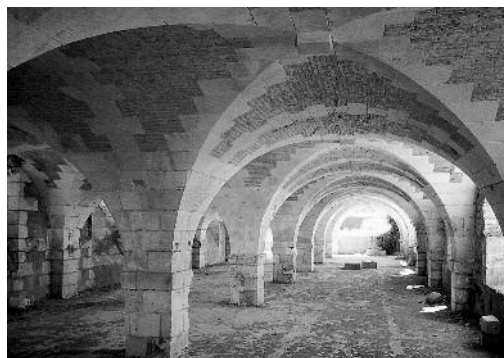
$$\text{Donc } V = 4 \int_0^1 (1-x^2) dx = 4 \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{8}{3}.$$

2. VOÛTES D'ARÊTE

On choisit de ne conserver de chaque voûte que la partie située à l'extérieur de l'autre.



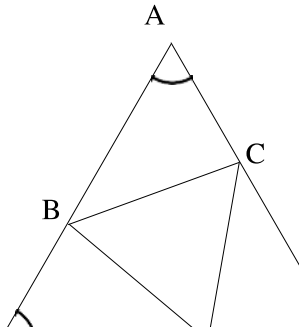
Voici, par exemple, les voûtes d'arête de la « Halle aux vivres » de Brouage en Charente-Maritime.



Volume W du solide sous la voûte d'arête

Comme précédemment, on suppose que chaque « tuile » composant la voûte est un demi-cylindre de révolution de rayon 1 et de hauteur 2. La figure ci-après représente le huitième de ce solide.

Un plan parallèle au plan (DIJ) détermine le rectangle MNN'M'.



Posons $JM' = x$ ($x \in [0;1]$)

Dans le triangle rectangle isocèle $AM'N'$, on a :

$M'N' = M'A = 1 - x$; dans le triangle rectangle JMM' , on a $MM' = \sqrt{1 - x^2}$.

L'aire du rectangle $MNN'M'$ est donc égale à $(1 - x) \sqrt{1 - x^2}$.

$$\text{Donc } W = 8 \int_0^1 (1 - x) \sqrt{1 - x^2} dx$$

Soit $\varphi = \text{Arc cos } x$.

$$\begin{aligned} \frac{W}{8} &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (1 - \cos \varphi) \sin \varphi (-\sin \varphi) d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 \varphi) d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 \varphi \cos \varphi) d\varphi. \end{aligned}$$

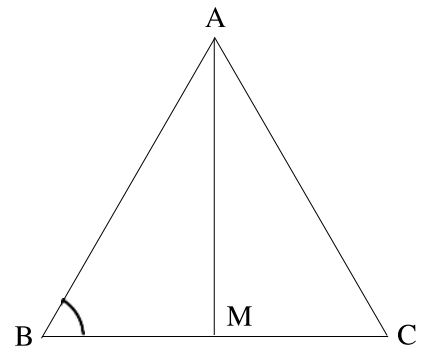
Après linéarisation des expressions sous les signes \int , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{W}{8} &= \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{1}{4} \sin \varphi - \frac{1}{12} \sin 3\varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \text{ donc } \mathbf{W = 2\pi - \frac{8}{3}}. \end{aligned}$$

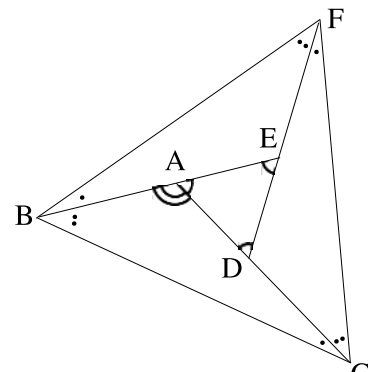
Une autre méthode consiste à observer que le volume W sous la voûte d'arête est égal à deux fois le volume d'une « tuile » moins le volume V du solide sous la voûte de cloître calculé précédemment. Puisque le volume d'un cylindre de rayon 1 et de hauteur 2 est 2π , alors $W = 2\pi - \frac{8}{3}$.

Remarque : avec l'unité de longueur choisie plus haut, le volume du parallélépipède rectangle dans lequel ces voûtes sont inscrites est égal à 4.

La voûte de cloître avec un volume égal à $\frac{8}{3}$ occupe à peine plus de la moitié de ce parallélépipède.



La voûte d'arête, par contre, occupe un volume proche de 3,62.



Les bâtisseurs des siècles passés guidaient sans doute leurs choix sur des critères esthétiques plus que sur des calculs de volumes.

Transformer une contemplation admirative en problème à résoudre : pourquoi pas ? Il y a aussi de l'esthétisme en mathématiques.