☙ Baccalauréat blanc S – 4 heures ❧
Lycée Pierre Mendès-France - Tunis 2007

L'utilisation de la calculatrice est autorisée

Exercice 1 : **4 points**

Cet exercice constitue une restitution organisée de connaissances.

Partie A : question de cours

On suppose connus les résultats suivants :

1. Deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes lorsque l'une est croissante, l'autre est décroissante et la différence $u_n - v_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
2. si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes telles que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante, alors pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, on a $u_n \leqslant v_n$.
3. Toute suite croissante et majorée est convergente ; toute suite décroissante et minorée est convergente.

Démontrer alors la proposition suivante :
Deux suites adjacentes sont convergentes et elles ont la même limite.

Partie B

On considère une suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est égal à -3.
On définit alors la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{-2}{3+u_n}$.
Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée.
Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.
2. Si (u_n) est minorée par -1, alors (v_n) est minorée par -1.
3. Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.
4. Si (u_n) est divergente, alors (v_n) est divergente.

Exercice 2 : **5 points**

Pour tout réel k strictement positif, on considère la fonction f_k définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$f_k(x) = \ln\left(\mathrm{e}^x + kx\right) - x.$$

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, unités graphiques : 5 cm en abscisses et 10 cm en ordonnées.

1. En étudiant le sens de variation d'une fonction convenablement choisie, démontrer que pour tout réel positif x, $\ln(1+x) \leqslant x$.
2. Calculer $f'_k(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0~;~+\infty[$ et en déduire le sens de variation de la fonction f_k.
3. Montrer que pour tout réel positif x,
$$f_k(x) = \ln\left(1 + k\frac{x}{\mathrm{e}^x}\right).$$
En déduire la limite de f_k en $+\infty$.
4. **a.** Dresser le tableau de variations de f_k.
   b. Montrer que pour tout réel positif x,
$$f_k(x) \leqslant \frac{k}{\mathrm{e}}.$$

5. Déterminer une équation de la tangente T_k à la courbe $\mathscr{C}_k$ au point O.
6. Tracer la courbe $\mathscr{C}_1$ ainsi que sa tangente en O.

Exercice 3 : **6 points**

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

On considère les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_{\mathrm{A}} = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3},\ z_{\mathrm{B}} = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3} \text{ et } z_{\mathrm{C}} = 2.$$

1. Placer ces points sur un dessin.
2. **a.** Vérifier que $\dfrac{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{C}}}{z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{C}}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
   b. En déduire la nature du triangle ABC.
   c. Déterminer le centre et le rayon du cercle Γ_1 circonscrit au triangle ABC. Tracer le cercle Γ_1.
3. **a.** Établir que l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z qui vérifient

$$2\left(z + \overline{z}\right) + z\overline{z} = 0$$

   est un cercle de centre Ω d'affixe -2. Préciser son rayon. Construire Γ_2.
   b. Vérifier que les points A et B sont éléments de Γ_2.
4. On appelle r_1 la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.
   a. Quelles sont les images des points A et B par la rotation r_1 ? Construire l'image C_1 du point C par la rotation r_1 puis calculer son affixe.
   b. Déterminer l'image du cercle Γ_2 par la rotation r_1.
5. Soit r une rotation. Pour tout point M d'affixe z, on note M' l'image de M par r et z' l'affixe de M'.
   On posera : $z' = az + b$, avec a et b des nombres complexes vérifiant $|a| = 1$ et $a \neq 1$.
   On suppose que r transforme le cercle Γ_2 en le cercle Γ_1.
   a. Quelle est l'image du point Ω par r ? En déduire une relation entre a et b.
   b. Déterminer en fonction de a l'affixe du point $r(\mathrm{C})$, image du point C par la rotation r.
   En déduire que le point $r(\mathrm{C})$ appartient à un cercle fixe que l'on définira.
   Vérifier que ce cercle passe par C_1.

Exercice 4 : **5 points**

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité mathématiques.

On étudie le mouvement aléatoire d'une puce. Cette puce se déplace sur trois cases notées A, B et C. Soit n un entier naturel. À l'instant initial $n = 0$, la puce se trouve en A.

- Si à l'instant n la puce est en A, alors à l'instant $(n+1)$, elle est soit en B avec une probabilité égale à $\dfrac{1}{3}$, soit en C avec une probabilité égale à $\dfrac{2}{3}$.
- Si à l'instant n la puce est en B, alors à l'instant $(n+1)$, elle est soit en A, soit en C de façon équiprobable.
- Si à l'instant n la puce est en C, alors elle y reste.

On désigne par A_n (resp. B_n et C_n) l'évènement : à l'instant n la puce est en A (resp. B et C).

On pose $a_n = P(\mathrm{A}_n),\ b_n = P(\mathrm{B}_n)$ et $c_n = P(\mathrm{C}_n)$.

On a donc $a_0 = 1,\ b_0 = 0$ et $c_0 = 0$.

Pour traiter cet exercice, on pourra s'aider d'arbres pondérés.

1. Étude du mouvement pour $1 \leqslant n \leqslant 3$.

   a. Donner $a_1,\ b_1$ et c_1. Calculer $a_1 + b_1 + c_1$.

   b. À l'instant $n = 2$, dans quelles cases la puce peut-elle se trouver ?
   Déterminer a_2, b_2 et c_2.

   c. À l'instant $n = 3$, dans quelles cases la puce peut-elle se trouver ?
   En déduire a_3 . Calculer b_3 et vérifier que $c_3 = \dfrac{17}{18}$.

2. Étude du cas général.

   a. Conjecturer les cases sur lesquelles la puce peut se trouver à l'instant n lorsque l'entier n est pair ($n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$), et les cases sur lesquelles elle peut se trouver si l'entier n est impair ($n = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$).
   En déduire (sans autre justification) la valeur de a_{2k+1}.

   b. Démontrer que $\left\{\begin{array}{lcl} b_{2k+1} & = & \dfrac{1}{3}a_{2k} \\ a_{2k+2} & = & \dfrac{1}{2}b_{2k+1} \end{array}\right.$

   c. Montrer que, pour tout entier naturel k, $a_{2k} = \left(\dfrac{1}{6}\right)^k$.

3. a. Déterminer le plus petit entier naturel N tel que

$$\text{pour tout entier} \quad n \geqslant N,\ a_n \leqslant 10^{-6}.$$

   b. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Préciser sa limite.

Exercice 4 : **5 points**

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité mathématiques.

1. On considère l'équation diophantienne :

$$8x + 5y = 1 \quad [E]$$

   d'inconnue le couple d'entiers relatifs $(x,\ y)$.

   a. Citer un théorème permettant d'affirmer que l'équation $[E]$ a des solutions.

   b. Donner une solution particulière de $[E]$.

   c. Résoudre alors dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $[E]$.

2. Soit N un entier naturel tel qu'il existe un couple $(a,\ b)$ de nombres entiers vérifiant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} N & = & 8a+1 \\ N & = & 5b+2 \end{array}\right.$$

   a. Montrer que le couple $(a,\ -b)$ est solution de [E].

   b. Quel est le reste dans la division euclidienne de $\mathbb{N}$ par 40 ?

3. On considère l'équation :

$$8X + 5Y = 100 \quad [E']$$

   d'inconnue le couple d'entiers relatifs $(X,\ Y)$.

   a. Résoudre $[E']$.

   b. Au VIII$^{\text{e}}$ siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune. Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?