

Mathématiques - brevet de technicien supérieur
session 2006 - groupement A
Éléments de correction

Exercice 1 - Spécialités CIRA, IRIST, Systèmes électroniques (sur 11 points)

Partie I

1. À l'aide du formulaire, et en notant $w(n) = y(n-2)$, on a $(\mathcal{Z}w)(z) = z^{-2}(\mathcal{Z}y)(z)$.
 De même, en notant $v(n) = x(n-1)$, $(\mathcal{Z}v)(z) = z^{-1}(\mathcal{Z}x)(z)$.
 Par linéarité de la transformée en z dans l'équation récurrente, on obtient :

$$(\mathcal{Z}y)(z) - z^{-2}(\mathcal{Z}y)(z) = 0,04z^{-1}(\mathcal{Z}x)(z)$$

$$\Leftrightarrow z^{-2}(z^2 - 1)(\mathcal{Z}y)(z) = 0,04z^{-1}(\mathcal{Z}x)(z)$$

$$\Leftrightarrow (z^2 - 1)(\mathcal{Z}y)(z) = 0,04z(\mathcal{Z}x)(z)$$

Or $z^2 - 1 = (z-1)(z+1)$, par conséquent si z est différent de -1 et 1 , on a :

$$(\mathcal{Z}y)(z) = \frac{0,04z}{(z-1)(z+1)}(\mathcal{Z}x)(z).$$

2. a. À l'aide de la table des transformées en \mathcal{Z} , $(\mathcal{Z}x)(z) = (\mathcal{Z}e)(z) = \frac{z}{z-1}$.
 En remplaçant dans l'expression du 1., on obtient :

$$(\mathcal{Z}y)(z) = \frac{0,04z^2}{(z-1)^2(z+1)}.$$

- b. Par réduction au même dénominateur, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{A}{(z-1)^2} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{z+1} &= \frac{A(z+1) + B(z-1)(z+1) + C(z-1)^2}{(z-1)^2(z+1)} \\ &= \frac{(b+c)z^2 + (a-2c)z + a-b+c}{(z-1)^2(z+1)} \end{aligned}$$

d'où le système suivant :

$$\begin{cases} b+c = 0 \\ a-2c = 0,04 \\ a-b+c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,02 \\ b = 0,01 \\ c = -0,01 \end{cases}.$$

Conclusion :

$$\frac{0,04z}{(z-1)^2(z+1)} = \frac{0,02}{(z-1)^2} + \frac{0,01}{z-1} - \frac{0,01}{z+1}.$$

- c. À l'aide du a. et b., on a :

$$(\mathcal{Z}y)(z) = \frac{0,02z}{(z-1)^2} + \frac{0,01z}{z-1} - \frac{0,01z}{z+1}.$$

L'original de $\frac{z}{(z-1)^2}$ est $r(n) = n$ pour $n \geq 0$.

L'original de $\frac{z}{z-1}$ est $e(n) = 1$ pour $n \geq 0$.

L'original de $\frac{z}{z+1}$ est $(-1)^n$: lecture de la table avec $\frac{z}{z+1} = \frac{z}{z-(-1)}$ et $a = -1$.

On obtient finalement, pour n entier positif ou nul :

$$y(n) = 0,02n + 0,01 - 0,01(-1)^n.$$

d. $(-1)^{2k} = 1$ d'où $y(2k) = 0,04k$.

$(-1)^{2k+1} = -1$ d'où $y(2k+1) = 0,02 \times (2k+1) - 0,01 \times 2 \Leftrightarrow y(2k+1) = 0,04k + 0,04$.

e. On a donc, pour tout entier naturel k , $y(2k+2) = y(2(k+1)) = 0,04(k+1)$, et $y(2k+1) = 0,04(k+1)$ d'après d.

Conclusion : Pour tout nombre entier naturel k , on a : $y(2k+1) = y(2k+2)$.

f. $y(-2) = 0$

$y(-1) = 0$

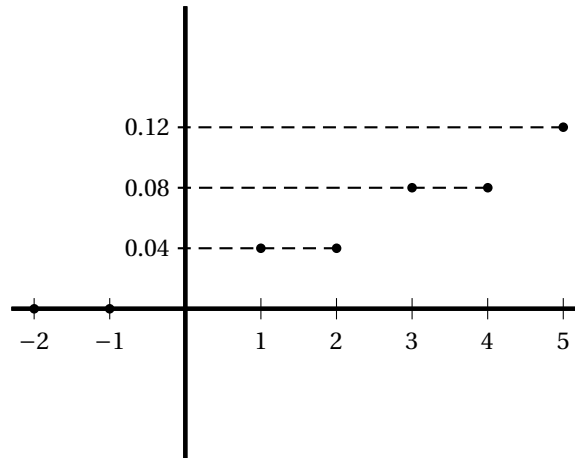
$y(0) = 0$

$y(1) = y(2) = 0,04$

$y(3) = y(4) = 0,08$

$y(5) = 0,12$.

Représentation graphique du signal causal :



Partie II

1. L'original de $\frac{F(p)}{p}$ est $\int_0^t f(u)U(t)du$.

Or f est causale alors $f(u)U(u) = f(u)$ pour t positif ou nul d'où : $s(t) = \int_0^t f(u)du$.

2.

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \sin(20u)du \\ &= \left[-\frac{\cos(20u)}{20} \right]_0^t \\ &= \frac{1}{20} (1 - \cos(20t)). \end{aligned}$$

3. La valeur minimale de s est 0 pour $t = \frac{k\pi}{10}$ avec k entier naturel.

La valeur maximale de s est $\frac{1}{10}$ pour $t = \frac{(2k+1)\pi}{20}$ avec k entier naturel.

Exercice 1 - Spécialités électrotechnique, Génie optique, TPIL - (sur 11 points)

Partie A

1. L'évènement E_1 se note $(A \cap B)$ alors :

$$\begin{aligned} p(E_1) &= p(A \cap B) \\ &= p(A) \times p(B) \quad \text{les évènements } A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \\ &= 0,03 \times 0,02 \\ &= 0,0006 \end{aligned}$$

2. L'évènement E_2 se note $(A \cup B)$ alors :

$$\begin{aligned} p(E_2) &= p(A \cup B) \\ &= p(A) + p(B) - p(A \cap B) \\ &= 0,03 + 0,02 - 0,0006 \\ &= 0,0494. \end{aligned}$$

3. L'évènement E_3 est l'évènement contraire de E_2 alors :

$$\begin{aligned} p(E_3) &= p(\overline{E_2}) \\ &= 1 - p(E_2) \\ &= 1 - 0,0494 \\ &= 0,9506. \end{aligned}$$

4. On cherche à calculer $p(E_1/E_2)$ alors :

$$\begin{aligned} p(E_1/E_2) &= \frac{p(E_1 \cap E_2)}{p(E_2)} \\ &= \frac{p(E_1)}{p(E_2)} \\ &= \frac{0,0006}{0,0494} \\ &\approx 0,012. \end{aligned}$$

Partie B

1. a. Extraire un lot de 100 appareils revient à répéter 100 fois le prélèvement d'un appareil. Cet appareil est défectueux avec une probabilité $p = 0,05$ ou non défectueux avec une probabilité $q = 1 - p = 0,95$.
L'assimilation du tirage à un tirage avec remise assure l'indépendance de ces épreuves.
En conclusion, la variable X_1 suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,05$.
- b. L'espérance est $E(X_1) = np \Leftrightarrow E(X_1) = 100 \times 0,05 \Leftrightarrow E(X_1) = 5$.
2. On suppose que l'on peut approcher la loi de X_1 par une loi de Poisson de paramètre λ .
- a. On conserve l'espérance mathématique. Par conséquent, le paramètre de la loi de Poisson est $\lambda = np = 5$.
- b. On note X_p la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de 100 appareils, associe le nombre d'appareils défectueux suivant la loi de Poisson de paramètre 5. On cherche alors $p(X_p \leq 2)$.

$$\begin{aligned} p(X_p \leq 2) &= p(X_p = 0) + p(X_p = 1) + p(X_p = 2) \\ &\approx 0,007 + 0,034 + 0,084 \\ &\approx 0,13. \end{aligned}$$

Partie C

1. On cherche la probabilité qu'il y ait au plus 50 appareils défectueux dans le lot, c'est-à-dire $p(X_2 \leq 50)$.

X_2 suit la loi normale de moyenne 40 et d'écart-type 6,2, alors la variable aléatoire $T = \frac{X_2 - 40}{6,2}$ suit la loi normale centrée réduite.

$$\begin{aligned}
p(X_2 \leq 50) &= p\left(T \leq \frac{50-40}{6,2}\right) \\
&= p(T \leq 1,61) \\
&= \Pi(1,61) \\
&\approx 0,95.
\end{aligned}$$

2. On cherche le réel x tel que $P(X_2 > x) = 0,01$.

$$p(X_2 > x) = p\left(T > \frac{x-40}{6,2}\right) \text{ alors il faut résoudre } p\left(T > \frac{x-40}{6,2}\right) = 0,01.$$

$$\text{Or } p\left(T > \frac{x-40}{6,2}\right) = 1 - p\left(T \leq \frac{x-40}{6,2}\right) \text{ d'où } p\left(T \leq \frac{x-40}{6,2}\right) = 0,99.$$

$$\text{Or } \Pi(2,33) = 0,99 \Leftrightarrow \frac{x-40}{6,2} = 2,33 \Leftrightarrow x = 40 + 2,33 \times 6,2 \Leftrightarrow x = 54,45.$$

Le plus petit entier k tel que la probabilité que le lot comporte plus de k appareils défectueux soit inférieure à 0,01 est $k = 55$.

Exercice 2 - Toutes spécialités (sur 9 points)

Partie A

1.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T (\alpha t + \beta) dt \quad \text{avec } T = 1 \\ &= \left[\frac{\alpha t^2}{2} + \beta t \right]_0^1 \\ &= \left(\frac{\alpha}{2} + \beta \right) - (0) \\ &= \frac{\alpha}{2} + \beta \end{aligned}$$

2. La pulsation est $\omega = 2\pi$.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T (\alpha t + \beta) \sin(2\pi n t) dt \quad \text{avec } T = 1 \\ &= 2 \int_0^1 (\alpha t + \beta) \sin(2\pi n t) dt \end{aligned}$$

On intègre par parties en posant :

$$\begin{aligned} u(t) &= \alpha t + \beta & \text{alors } u'(t) &= \alpha \\ v'(t) &= \sin(2\pi n t) & \text{alors } v(t) &= -\frac{\cos(2\pi n t)}{2\pi n} \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} b_n &= 2 \left(- \left[\frac{(\alpha t + \beta) \cos(2\pi n t)}{2\pi n} \right]_0^1 - \frac{\alpha}{2\pi n} \int_0^1 (-\cos(2\pi n t)) dt \right) \\ &= 2 \left(-\frac{1}{2\pi n} [(\alpha + \beta) - \beta] + \frac{\alpha}{2\pi n} \left[\frac{\sin(2\pi n t)}{2\pi n} \right]_0^1 \right) \\ &= 2 \left(-\frac{\alpha}{2\pi n} + 0 \right) \\ &= -\frac{\alpha}{n\pi} \end{aligned}$$

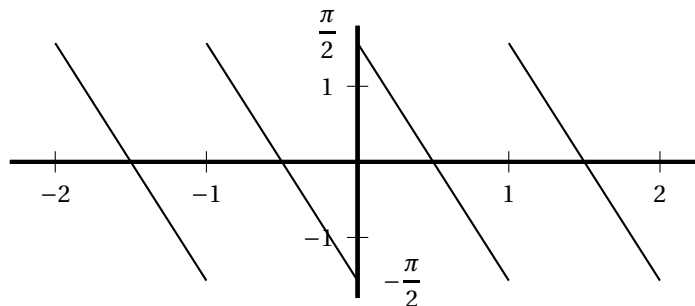
3. a. On veut $a_0 = 0$ et $b_n = \frac{1}{n}$ et d'après 2., on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{2} + \beta = 0 \\ -\frac{\alpha}{n\pi} = \frac{1}{n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\pi \\ \beta = \frac{\pi}{2} \end{cases} .$$

L'expression de f est alors :

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \pi t.$$

b. Courbe représentative de f sur $[-2; 2]$:



Partie B

1. On a :

$$s_1(t) = \frac{1}{1-4\pi^2} \sin(2\pi t) + \frac{1}{2(1-16\pi^2)} \sin(4\pi t)$$

d'où

$$s_1'(t) = \frac{2\pi}{1-4\pi^2} \cos(2\pi t) + \frac{4\pi}{2(1-16\pi^2)} \cos(4\pi t)$$

$$s_1''(t) = -\frac{4\pi^2}{1-4\pi^2} \sin(2\pi t) - \frac{16\pi^2}{2(1-16\pi^2)} \sin(4\pi t).$$

$$\begin{aligned} s_1''(t) + s_1(t) &= -\frac{4\pi^2}{1-4\pi^2} \sin(2\pi t) - \frac{16\pi^2}{2(1-16\pi^2)} \sin(4\pi t) + \frac{1}{1-4\pi^2} \sin(2\pi t) + \frac{1}{2(1-16\pi^2)} \sin(4\pi t) \\ &= \frac{1-4\pi^2}{1-4\pi^2} \sin(2\pi t) + \frac{1-16\pi^2}{2(1-16\pi^2)} \sin(4\pi t) \\ &= \sin(2\pi t) + \frac{1}{2} \sin(4\pi t). \end{aligned}$$

Conclusion : s_1 est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

2. Il faut chercher la solution générale de l'équation différentielle homogène associée à (E) :

$$s''(t) + s(t) = 0.$$

L'équation caractéristique associée est : $r^2 + 1 = 0$ dont le discriminant est égal à -1 . Cette équation possède deux racines complexes conjuguées qui sont j et $-j$.

La solution générale de l'équation homogène est alors :

$$s_0(t) = \lambda \sin t + \mu \cos t \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}.$$

La solution générale de (E) est donné par la somme entre une solution particulière de l'équation complète et la solution générale de l'équation homogène associée, d'où :

$$\begin{aligned} s(t) &= s_1(t) + s_0(t) \\ s(t) &= \frac{1}{1-4\pi^2} \sin(2\pi t) + \frac{1}{2(1-16\pi^2)} \sin(4\pi t) + \lambda \sin t + \mu \cos t \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$