

🌀 BTS Groupement A – Mathématiques 🌀

Éléments de correction

Session 2011

Exercice 1 :

Spécialités CIRA, IRIS, Systèmes électroniques, TPIL

Partie A : QCM

Les bonnes réponses sont :

1. $f(t) = 10(\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-1))$
2. $S(p) = \frac{1}{1+0,005p} V(p)$
3. $s(t) = ke^{-200t} + 2$

Partie B : Simulation numérique

1. Comme $T_e = 0,5 \cdot 10^{-3}$ alors $\frac{0,005}{T_e} = 10$, l'équation devient alors :

$$\begin{aligned}10(y(n) - y(n-1)) + y(n) &= x(n) \\ \Leftrightarrow 11y(n) - 10y(n-1) &= x(n)\end{aligned}$$

2. (a) On a, sachant que $x(n) = 2e(n)$, en prenant la transformée en Z de l'équation précédente :

$$11Y(z) - 10(\mathcal{Z}y(n-1))(z) = 2(\mathcal{Z}e(n))(z)$$

$$11Y(z) - 10z^{-1}Y(z) = 2\frac{z}{z-1}$$

$$\left(11 - \frac{10}{z}\right)Y(z) = \frac{2z}{z-1}$$

$$11\left(z - \frac{10}{11}\right)\frac{Y(z)}{z} = \frac{2z}{z-1}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{2}{11} \times \frac{2z}{(z-1)\left(z - \frac{10}{11}\right)}$$

- (b) Une réduction au même dénominateur est nécessaire afin de montrer que

$$\frac{2}{11} \left(\frac{11z}{z-1} - \frac{10z}{z - \frac{10}{11}} \right) = \frac{2}{11} \times \frac{z^2}{(z-1)\left(z - \frac{10}{11}\right)} = Y(z)$$

- (c) Par développement et simplification de l'expression précédente, on obtient :

$$Y(z) = 2 \times \frac{z}{z-1} - 2 \times \frac{10}{11} \times \frac{z}{z - \frac{10}{11}}$$

3. (a) Par lecture inverse de la table des transformées en Z , on obtient :

$$\begin{aligned}y(n) &= 2e(n) - 2 \times \frac{10}{11} \times \left(\frac{10}{11}\right)^n e(n) \\ &= 2e(n) - 2 \times \left(\frac{10}{11}\right)^{n+1} e(n)\end{aligned}$$

- (b) Comme $\left(\frac{10}{11}\right)^{n+1}$ est une suite géométrique de raison $\frac{10}{11} \in]-1; 1[$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{10}{11}\right)^{n+1} = 0$ d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y(n) = 2$$

Partie C :

1. Voir table 1 du document réponse numéro 1.
2. Voir figure 1 du document réponse numéro 1.

Exercice 1 :**Spécialités Électrotechnique – Génie optique****Partie A :**

Les bonnes réponses sont :

1. La probabilité de l'événement E_1 est égale 0,01.
2. Si l'événement E_2 est réalisé, le signal reçu est 10.
3. La probabilité de l'événement E_2 est égale à 0,09.
4. La probabilité de l'événement E_3 est égale à 0,81.
5. La probabilité de l'événement E_4 est égale à 0,19.

Partie B :

1. (a) X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,1$.

(b) On demande $p(X = 1)$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} p(X = 1) &= C_{10}^1 0,1^1 \times 0,9^9 \\ &= 10 \times 0,1^1 \times 0,9^9 \\ &= 0,9^9 \\ &\approx 0,387 \end{aligned}$$

(c) On demande $p(X \leq 1)$.

$$\begin{aligned} p(X \leq 1) &= p(X = 0) + p(X = 1) \\ &= C_{10}^0 0,1^0 \times 0,9^{10} + p(X = 1) \\ &= 0,9^{10} + p(X = 1) \\ &\approx 0,736 \\ &\approx 0,74 \text{ à } 0,01 \text{ près} \end{aligned}$$

2. (a) La variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 1000$ et $p = 0,002$. Par conséquent, par approximation de cette loi binomiale par une loi de Poisson, l'espérance est conservée.

Pour une loi binomiale, l'espérance est égale à np , qui est égale au paramètre λ de la loi de Poisson.

On a alors ici : $\lambda = 0,002 \times 1000 = 2$.

(b) On demande $p(Y \geq 1)$.

$$\begin{aligned} p(Y \geq 1) &= 1 - p(Y = 0) \\ &\approx 1 - 0,135 \\ &\approx 0,865 \text{ à } 0,001 \text{ près} \end{aligned}$$

Partie C :

1. (a) Pour avoir un chiffre 1, il faut que $4 + U \geq 2$, c'est-à-dire $U \geq -2$.

(b) Comme U suit la loi normale $\mathcal{N}(0; 0,7)$ alors $T = \frac{U}{0,7}$ suit $\mathcal{N}(0; 1)$.

$$\begin{aligned} p(U \geq -2) &= p\left(T \geq -\frac{2}{0,7}\right) \\ &= p(T \geq -2,857) \\ &= p(T \leq 2,857) \\ &\approx 0,998 \end{aligned}$$

2. Comme U suit la loi normale $\mathcal{N}(0; \sigma)$ alors $T = \frac{U}{\sigma}$ suit $\mathcal{N}(0; 1)$.

On a

$$\begin{aligned} p(U < -2) &= p\left(T < -\frac{2}{\sigma}\right) \\ &= p\left(T > \frac{2}{\sigma}\right) \\ &= 1 - p\left(T < \frac{2}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

Il faut alors résoudre l'inéquation

$$\begin{aligned} p(U < -2) &< 0,001 \\ 1 - p\left(T < \frac{2}{\sigma}\right) &< 0,001 \\ 0,999 &< p\left(T < \frac{2}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

c'est-à-dire , d'après la table de la loi normale,

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sigma} &\geq 3,1 \\ \sigma &\leq 0,645 \end{aligned}$$

Exercice 2 :**Toutes spécialités****Partie A :**

1. Voir figure 2 du document réponse.
2. On a

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 0,5(t-1) dt \\
 &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2}t^2 + t \right]_{-1}^1 \\
 &= \frac{1}{4} \times 2 \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

3. (a) On a

$$\begin{aligned}
 \omega &= \frac{2\pi}{T} \\
 &= \frac{2\pi}{2} \\
 &= \pi
 \end{aligned}$$

- (b) On a, pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{2}{T} \int_{-1}^1 f(t) \sin(n\omega t) dt \\
 &= \frac{2}{2} \int_{-1}^1 0,5(t-1) \sin(\pi t) dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (t-1) \sin(\pi t) dt
 \end{aligned}$$

On procède à une intégration par parties en posant

$$\begin{cases} u(t) = t+1 \\ v'(t) = \sin \pi t \end{cases} \quad \begin{cases} u(t) = 1 \\ v(t) = -\frac{1}{\pi} \cos \pi t \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 (t-1) \sin(\pi t) dt &= \left[-\frac{1}{\pi} (t+1) \cos \pi t \right]_{-1}^1 + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \cos \pi t dt \\
 &= -\frac{2}{\pi} \cos \pi + \frac{1}{\pi^2} [\sin \pi t]_{-1}^1 \\
 &= \frac{2}{\pi}
 \end{aligned}$$

En remplaçant, on obtient alors

$$b_1 = \frac{1}{\pi}$$

4. (a) On a, pour tout nombre réel $t \in]-1; 1[$, $g(t) = 0,5t$.
Pour la représentation graphique, voir figure 3 du document réponse.
- (b) Comme la fonction g est impaire, la courbe représentative de la fonction g est symétrique par rapport à l'origine du repère.

(c) La fonction g étant impaire, pour tout entier naturel n , les coefficients de Fourier $a_n(g)$ sont nuls.

Or, on a, pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} a_n(g) &= \frac{2}{T} \int_{-1}^1 g(t) \cos n\pi t \, dt \\ &= \frac{2}{T} \int_{-1}^1 (f(t) - 0,5) \cos n\pi t \, dt \\ &= \frac{2}{T} \int_{-1}^1 f(t) \cos n\pi t \, dt - 0,5 \times \frac{2}{T} \int_{-1}^1 \cos n\pi t \, dt \\ &= a_n(f) - \frac{1}{T} \left[\frac{1}{n\pi} \sin(n\pi t) \right]_{-1}^1 \\ &= a_n(f) \end{aligned}$$

D'où, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $a_n = 0$.

5. On a $f^2(t) = \frac{1}{4}(t+1)^2$, d'où

$$\begin{aligned} f_{eff}^2 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (f(t))^2 \, dt \\ &= \frac{1}{8} \int_{-1}^1 (t+1)^2 \, dt \\ &= \frac{1}{8} \left[\frac{1}{3}(t+1)^3 \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{8} \times \frac{1}{3} \times 2^3 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

6. (a) On a

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{k=1}^5 \frac{1}{k^2} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi^2} \frac{5269}{3600} \\ &\approx 0,324 \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{P}{f_{eff}^2} \approx 0,972$$

(b) L'erreur commise est

$$\begin{aligned} \frac{f_{eff}^2 - P}{f_{eff}^2} &= 1 - \frac{P}{f_{eff}^2} \\ &\approx 0,028 \\ &\approx 2,8\% \end{aligned}$$

Partie B :

Remarque : Cette question est mal posée, car il manque l'essentiel, à savoir que la fonction h vérifie les conditions de Dirichlet afin de s'assurer de la convergence de la série de Fourier vers la fonction h régularisée. Ici, nous allons donc supposer que c'est bien le cas...

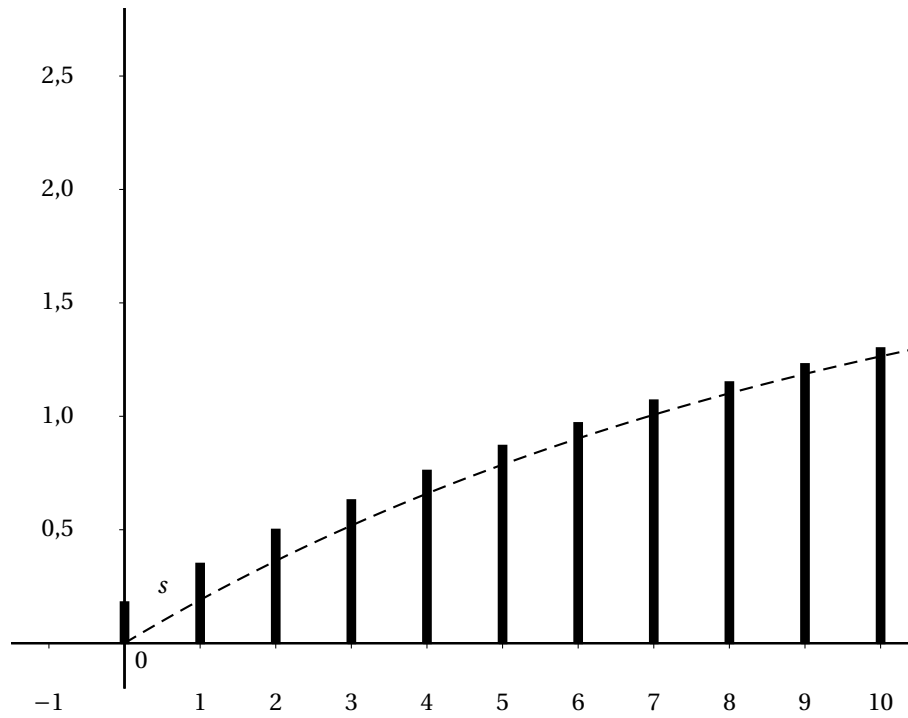
- La série de Fourier ne comportant que des cos, par conséquent, la fonction h est paire.
- Grâce à la parité de la fonction h , la courbe représentative admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie, par conséquent, nous pouvons déjà éliminer les courbes 1 et 4.
La fonction h est périodique de période 2 donc nous pouvons maintenant éliminer la courbe 3 qui représente une fonction périodique de période 1.

3. Par lecture graphique, nous avons $h(t) = \pi t$ sur l'intervalle $[0; 1]$.

Grâce à cette expression, nous avons donc que la fonction h est continue sur \mathbf{R} , de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, par conséquent, à l'aide du théorème de Dirichlet, la série de Fourier de h converge en tout point de \mathbf{R} vers la fonction h .

Document réponse numéro 1 à joindre avec la copie

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y(n)$	0,18	0,35	0,50	0,63	0,76	0,87	0,97	1,07	1,15	1,23	1,30

TABLE 1 – Tableau de valeur de la suite y FIGURE 1 – Signal numérique y

Document réponse numéro 2 à joindre à la copie

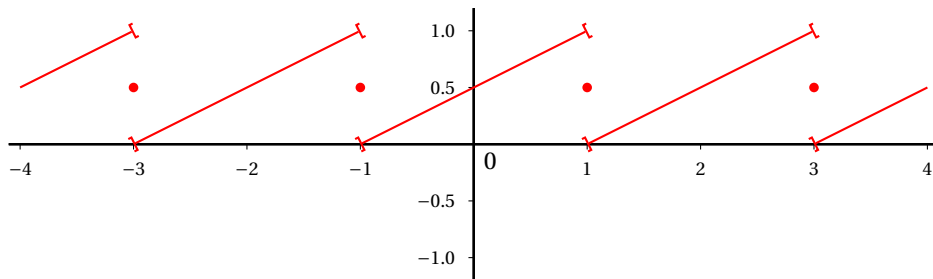


FIGURE 2 – représentation graphique de la fonction f

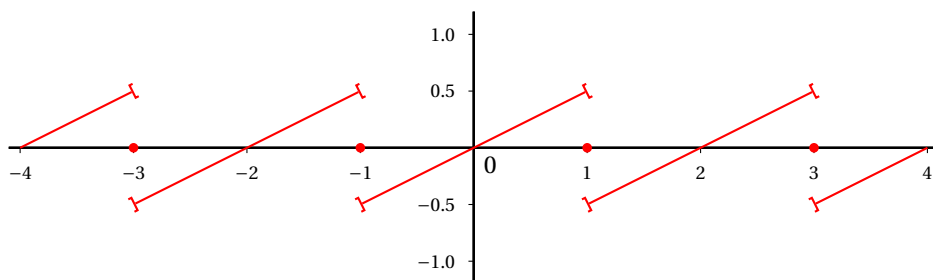


FIGURE 3 – représentation graphique de la fonction g

Suggestions ou remarques : xavier.tisserand@ac-poitiers.fr