

BTS Groupement A – Mathématiques

Éléments de correction

Session 2013

Exercice 1 :

Partie A :

1. Voir annexe Table 1 et Figure 1
2. (a) On a $S(0) = f(0) + f\left(\frac{2\pi}{3}\right) + f\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ d'où

$$S(0) = -1$$

(b) À $t = 0$, $S(0) \neq 0$ par conséquent, le système triphasé n'est pas équilibré.

Partie B :

1. a_0 correspond à la valeur moyenne de la fonction, c'est-à-dire aussi à un facteur 2π près, à l'aire algébrique entre la courbe et l'axe des abscisses.
Graphiquement, cette aire est nulle.

$$a_0 = 0$$

2. La fonction étant paire, pour tout entier n non nul, $b_n = 0$.

3. (a) • Sur $\left]0; \frac{\pi}{3}\right[$, $g(t) = 1$
• Sur $\left]\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right[$, $g(t) = 0$
• Sur $\left]\frac{2\pi}{3}; \pi\right[$, $g(t) = -1$

(b) On a

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos(nt) dt \\ &= \frac{4}{2\pi} \int_0^{\pi} g(t) \cos(nt) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(nt) dt + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} 0 dt + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} (-\cos(nt)) dt \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \left[-\frac{\sin(nt)}{n} \right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \right) \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$a_n = \frac{2}{n\pi} \left(\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) \right)$$

4. (a) Pour $n = 3k$, on a $a_{3k} = \frac{2}{3k\pi} (\sin(k\pi) + \sin(2k\pi))$ d'où

$$a_{3k} = 0$$

(b) Au vu de la question précédente, l'amplitude des harmoniques de rang multiple de 3 est nulle. Par conséquent le système triphasé est équilibré.

Exercice 2 :**Partie A :**

1. On recherche une solution y constante, alors $y(t) = a$ d'où $y(t) = 0 = y''(t) = 0$.
En remplaçant dans l'équation (E), on obtient immédiatement

$$y(t) = 10$$

2. L'équation caractéristique associée à (E_0) s'écrit $r^2 + r + 0,25 = 0$, c'est-à-dire $(r + 0,5)^2 = 0$. Elle admet donc une racine double $r = -0,5$.
Les solutions de (E_0) s'écrivent alors

$$y(t) = (\lambda t + \mu)e^{-0,5t} \quad \text{avec } \lambda \text{ et } \mu \text{ réels}$$

3. La solution générale de l'équation (E) s'obtient en ajoutant la solution générale de l'équation homogène associée (E_0) et une solution particulière de (E).

$$y(t) = 10 + (\lambda t + \mu)e^{-0,5t} \quad \text{avec } \lambda \text{ et } \mu \text{ réels}$$

4. La bonne réponse est

$$10 - (5t + 10)e^{-0,5t}$$

Partie B :

1. À l'aide de la table des transformées de Laplace,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[s''(t)](p) &= p^2 S(p) - ps(0) - s'(0) \\ &= p^2 S(p) \text{ car } s(0) = 0 \text{ et } s'(0) = 0 \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{L}[\sin(2t)U(t)](p) = \frac{2}{p^2 + 4}$$

d'où, en prenant la transformée de Laplace de l'équation différentielle,

$$\begin{aligned} p^2 S(p) + 9S(p) &= 9 \times \frac{2}{p^2 + 4} \\ (p^2 + 9)S(p) &= \frac{18}{p^2 + 4} \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$G(p) = \frac{18}{(p^2 + 4)(p^2 + 9)}$$

2. On a, en réduisant au même dénominateur :

$$\begin{aligned} \frac{a}{p^2 + 4} + \frac{b}{p^2 + 9} &= \frac{a(p^2 + 9) + b(p^2 + 4)}{(p^2 + 4)(p^2 + 9)} \\ &= \frac{(a + b)p^2 + 9a + 4b}{(p^2 + 4)(p^2 + 9)} \end{aligned}$$

Par identification avec la relation demandée, on obtient le système

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 9a + 4b = 18 \end{cases}$$

d'où $a = -b = \frac{18}{5}$.

$$S(p) = \frac{18}{5} \left(\frac{1}{p^2 + 4} - \frac{1}{p^2 + 9} \right)$$

3. On a par lecture de la table des transformées de Laplace

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2+4}\right] = \frac{1}{2}\sin(2t)U(t)$$

et

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2+9}\right] = \frac{1}{3}\sin(3t)U(t)$$

alors,

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{18}{5}\left(\frac{1}{2}\sin(2t) - \frac{1}{3}\sin(3t)\right)U(t) \\ &= \left(\frac{9}{5}\sin(2t) - \frac{6}{5}\sin(3t)\right)U(t) \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$s(t) = (1,8\sin(2t) - 1,2\sin(3t))U(t)$$

Partie C :

1. On lit graphiquement

$$A \approx 2,8$$

2. On a immédiatement

$$f'(t) = 3,6(\cos(2t) - \cos(3t))$$

3. (a) On utilise le formulaire

$$\begin{aligned} \cos(2t) - \cos(3t) &= -2\sin\left(\frac{2t+3t}{2}\right)\sin\left(\frac{2t-3t}{2}\right) \\ &= -2\sin\left(\frac{5t}{2}\right)\sin\left(\frac{-t}{2}\right) \\ &= 2\sin\left(\frac{5t}{2}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right) \end{aligned}$$

d'où

$$f'(t) = 7,2\sin\left(\frac{5t}{2}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

On en déduit immédiatement

$$f'\left(\frac{2k\pi}{5}\right) = 0$$

(b) Les points M_1, M_2, M_3 et M_4 correspondent aux extremums locaux de la fonction f , c'est-à-dire qu'en l'abscisse de ces points, la dérivée de f est nulle.

- L'abscisse de M_1 est $\frac{2\pi}{5}$
- L'abscisse de M_2 est $\frac{4\pi}{5}$
- L'abscisse de M_3 est $\frac{6\pi}{5}$
- L'abscisse de M_4 est $\frac{8\pi}{5}$

(c) C'est le point M_3 qui correspond à l'amplitude maximale, donc

$$A = f\left(\frac{6\pi}{5}\right) = 1,8\sin(2,4\pi) - 1,2\sin(3,6\pi)$$

c'est-à-dire

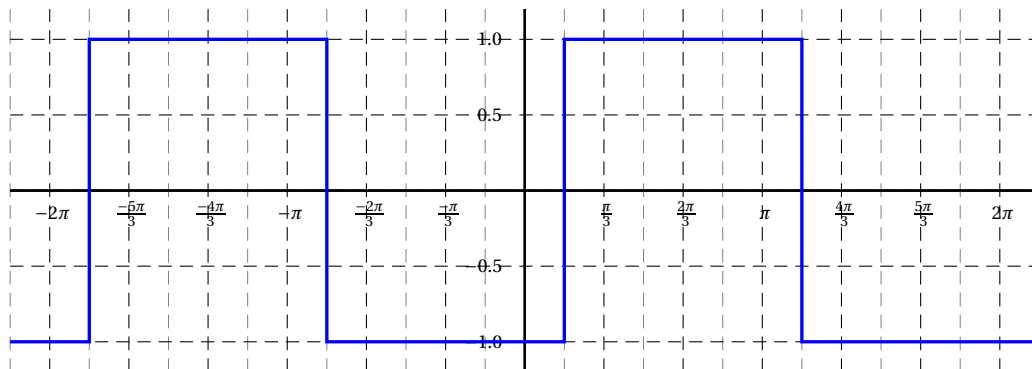
$$A \approx 2,853$$

**Document réponse 1 de l'exercice,
spécialités CIRA, Électrotechnique, IRIS, Génie optique, Systèmes électroniques, TPIL**

TABLE 1 – Tableau des valeurs prises par $f\left(t + \frac{4\pi}{3}\right)$ pour certaines valeurs de t

t	$-\frac{4\pi}{3}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$
$f\left(t + \frac{4\pi}{3}\right)$	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1

FIGURE 1 – Courbe représentative de la tension $f\left(t + \frac{4\pi}{3}\right)$



Suggestions ou remarques : xavier.tisserand@ac-poitiers.fr