Épreuve I

Académie d'Amiens et académie de Lille

Série S

Exercice 1. Nombres étranches

Notations
Dans tout le problème, on considère des entiers naturels n. Si un tel nombre s'écrit avec p chiffres dans le système décimal, on note $\overline{n_1 n_2 n_3 \cdots n_{p-1} n_p}$, écriture dans laquelle les n_i sont des chiffres et $n_1 \neq 0$, et qui signifie que

$$n = n_1 \times 10^{p-1} + n_2 \times 10^{p-2} + \ldots + n_{p-1} \times 10 + n_p.$$

Par exemple, si on prend $n = 137$, alors $p = 3$ et $\overline{137} = 1 \times 10^2 + 3 \times 10 + 7$.

Rappel

Étant donné des entiers naturels a et b tels que b soit non nul, la *division euclidienne de a par b* leur associe deux entiers naturels q et r tels que $a = bq + r$ et $r < bq$ et r sont le *quotient* et le *reste* de la division euclidienne de a par b.
Par exemple, la division euclidienne de 123 par 5 fournit le quotient 24 et le reste 3.

Définition

Un entier naturel note $n = \overline{n_1 n_2 n_3 \cdots n_{p-1} n_p}$ est dit *étranche* si, pour tout entier i compris entre 2 et p le nombre note $\overline{n_1 n_2 n_3 \cdots n_i}$ est un multiple de i.

102	326	705
1 024	2 041	3 268
10 240	20 410	70 520
102 404	326 804	705 204
1 024 041	7 052 046	9 222 467

Table I.1

Par exemple, 2 016 est un nombre *étranche* de quatre chiffres, car 20 et multiple de 2, 201 est multiple de 3 et 2 016 est multiple de 4. En revanche, le nombre 2 019, pas plus que tout nombre dont les quatre premiers chiffres sont 2, 0, 1, 9 ne sont étranches.

Partie 1

Déterminer les nombres étranches parmi ceux figurant dans le tableau I.2.

Partie 2 : Recherche de nombres étranches à deux ou trois chiffres

1. Justifier qu'il y a exactement 45 nombres étranches à deux chiffres.

2. Soit n un entier naturel non nul à rois chiffres : $n = \overline{n_1 n_2 n_3}$.

- **a.** Quels sont les restes possibles dans la division euclidienne d'un entier par 3 ?
- **b.** On suppose que $\overline{n_1 n_2}$ est un nombre étranche à deux chiffres, multiple de 3. Quelles sont les valeurs possibles de n_3 pour que $\overline{n_1 n_2 n_3}$ soit un nombre étranche à trois chiffres.
- **c.** Même question pour un nombre étranche à deux chiffres dont le reste de la division euclidienne par 3 est 1, puis 2.
- **d.** Déduire de ce qui précède qu'il existe exactement 150 nombres étranches à trois chiffres.
- **e.** Combien y a-t-il de nombres pairs parmi les nombres étranches à trois chiffres ?

3. Voici un algorithme écrit en langage naturel.

- **a.** Écrire la trace de la boucle « Pour » de cet algorithme en complétant le tableau I.2 si la variable n contient la valeur 621.
- **b.** Si la variable n contient la valeur 621 , quelle serait la valeur affectée à la variable *compteur* à l'issue de l'exécution de l'algorithme ?
- **c.** Si la variable n contient la valeur 622 , quelle serait la valeur affectée à la variable *compteur* à l'issue de l'exécution de l'algorithme ?
- **d.** Quel est le rôle de cet algorithme ?

Partie 3 Dénombrement des nombres étranches à quatre ou cinq chiffres

```
c ← 0 ;
pour i variant de 0 à 1 faire faire
    m ← quotient de la division euclidienne de n par 10^(1−i) ;
    si m est multiple de 2 + i alors
        c ← c + 1 ;
    fin
fin
si c = 2 alors
    compteur ← 1
fin
sinon
    compteur ← 0
fin
```

i	m	c
0		
1		

Table I.2

1. Soit n un entier naturel non nul à quatre chiffres. On écrit $n = \overline{n_1 n_2 n_3 n_4}$.

a. Justifier qu'il existe un entier naturel k tel que $n = \overline{n_3 n_4} + 4k$.

b. En déduire que l'entier naturel n est multiple de 4 si et seulement si $\overline{n_3 n_4}$ est multiple de 4.

c. Justifier alors qu'il y a exactement 375 nombres étranches à quatre chiffres.

2. Combien y a-t-il de nombres étranches à cinq chiffres ?

Exercice 2. Jeux de rochers

Dans un jeu vidéo, le joueur doit empêcher un « humanoïde » de franchir une frontière constituée de rochers espacés régulièrement, comme l'illustre le dessin de la figure I.1.

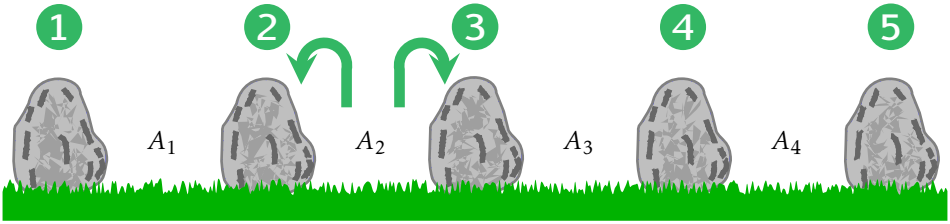


Figure I.1: *Écran du jeu*

Le joueur dispose d'une grenade paralysante. Le programme place l'humanoïde derrière un des rochers. Alerté par le jeu, le joueur déclenche l'envoi de la grenade, qui atterrit entre deux rochers. Si l'humanoïde est caché derrière un des deux rochers, il est neutralisé et le joueur gagne. Sinon, l'humanoïde peut franchir la frontière et le joueur perd. Le dessin I.1 illustre le cas où la grenade atterrit en A_2 . Si l'humanoïde est caché derrière le rocher 2 ou le rocher 3, le joueur gagne la partie, sinon il la perd.

Notations

Le jeu comporte un nombre entier n de rochers, $n \geqslant 3$.
Le programme place l'humanoïde derrière les rochers 1, 2, …, n avec les probabilités respectives p_1 , p_2 , …, p_n. On rappelle que $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.
La grenade paralysante est envoyée dans un des intervalles A_1, A_2 , …, A_{n-1} avec les probabilités respectives q_1, q_2, …, q_{n-1}. On rappelle que $q_1 + q_2 + \cdots + q_{n-1} = 1$.
Ces probabilités sont définies suivant deux modes : le mode *novice* étudié dans la **situation 1** et le mode *expert* étudié dans la **situation 2**.
Le but général de l'exercice et l'étude des stratégies que peut adopter le joueur en fonction du comportement de l'humanoïde programmé par le jeu.

Situation 1 : Découverte du jeu et observations

Un joueur inexpérimenté joue avec l'hypothèse que le programme place aléatoirement l'humanoïde derrière les rochers de façon équiprobable. Il décide de jouer en mode *novice* : lorsque le joueur décide de lancer la grenade, celle-ci est envoyée aléatoirement dans l'un des intervalles A_1, A_2, …, A_{n-1} de façon équiprobable.

1. Jeu à trois rochers

a. Déterminer les probabilités p_1, p_2, p_3.

b. Déterminer les probabilités q_1, q_2.

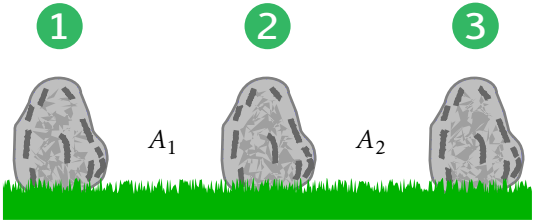


Figure I.2: *Jeu à 3 rochers*

c. Quelle est la probabilité que le joueur gagne la partie lorsque la grenade atterrit en A_1 ?

d. En déduire la probabilité que le joueur gagne la partie.

2. Jeu à quatre rochers

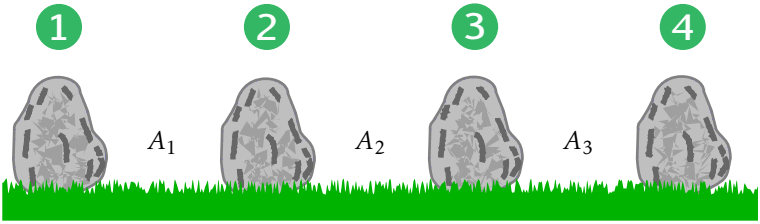


Figure I.3: *Jeu à 4 rochers*

a. Compléter les cases vides du tableau donné en annexe par G ou P selon que la partie est gagnée ou perdue par le joueur.

b. Entourer G ou P (même signification) dans l'arbre donné en annexe.

c. Existe-t-il un intervalle pour lequel la probabilité de gagner (point de vue du joueur) est la plus forte ?

3. Jeu à n rochers $n \geqslant 4$

Existe-t-il un intervalle pour lequel la probabilité de gagner (point de vue du joueur) est la plus forte ?

4. Jeu à 5 rochers

Sur 2 800 parties avec 5 rochers, un joueur a relevé les résultats du tableau I.3

Intervalle	A_1	A_2	A_3	A_4
Nombre de lancers	698	704	695	703
Nombre de lancers victorieux	301	200	197	299

Table I.3

a. Pourrait-on penser que le nombre total de victoires s'accorde bien avec la répartition équiprobable de l'humanoïde derrière les rochers ?

b. Un site de « cheat code [1] » affirme que le programme de jeu place l'humanoïde derrière les rochers 1 et n avec pour chacun une probabilité égale à $2p$ et derrière les rochers 2 à $n-1$ avec pour chacun une probabilité p.

- déterminer dans le cas $n = 5$, si on suit cette hypothèse, le nombre p.
- les résultats observés semblent-ils en accord avec l'affirmation du site ?

Situation 2 Choix de $q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}$ en mode expert

On admet l'affirmation du « cheat code » et on suppose que, pour $n \geqslant 3$, le programme place l'humanoïde derrière les rochers 1 et n avec une probabilité $\dfrac{2}{n+2}$ et derrière les rochers 2 à $n-1$ avec une probabilité $\dfrac{1}{n+2}$.
En mode *expert*, le joueur décide des probabilités $q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}$ avec lesquelles la grenade sera lancée vers les intervalles $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ respectivement. Se pose alors la question : comment choisir $q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}$ pour que la probabilité de gagner soit la même quel que soit l'intervalle dans lequel la grenade atterrit ?

1. Justifier que $\dfrac{3}{n+2}q_1 = \dfrac{2}{n+2}q_2$.

2. Justifier que $2q_1 + (n-3)q_2 = 1$.

3. En déduire les probabilités q_1 et q_2 .

4. Comment répondre à la question posée ?

1. *Ce type de site fournit aux joueurs des astuces pour gagner plus facilement aux jeux*

		A_1	A_2	A_3
Rocher	1			
	2			
	3			
	4			

Table I.4: *Tableau à compléter*

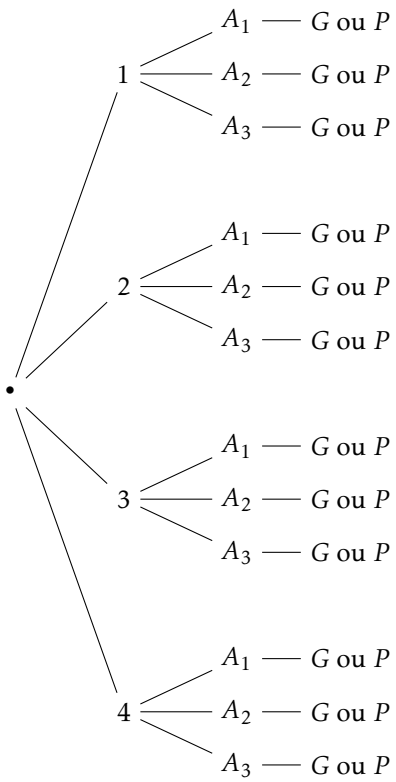


Figure I.4: *Arbre à compléter*

Séries autre que S

Exercice 3. Des nombres renversants !

Sophie s'amuse souvent avec les nombres entiers naturels ; elle joue ainsi à les « renverser ».

Nombre renversé

Le **renversé** d'un entier naturel est l'entier naturel formé avec les mêmes chiffres mais écrit dans le sens contraire.
123 est le renversé de 321. (Remarque : si un nombre est égal à son renversé, on dit qu'il est *palindrome*.)

1. Sophie a constaté que 32 et 56 ont la même somme que leurs renversés, 23 et 65. Elle remarque que 32 et 56 ont la caractéristique suivante : la somme des chiffres des dizaines, 3 et 5, est égale à la somme des chiffres des unités 2 et 6.
   a. Donner un autre couple de nombres à deux chiffres ayant cette caractéristique sur les dizaines et les unités. Leur somme est-elle égale à celle de leurs renversés ?
   b. Sophie conjecture la proposition suivante, appelée P_1 : « La somme de deux nombres entiers à deux chiffres n_1 et n_2, non multiples de 10, est égale à la somme de leurs renversés, *si, et seulement si*, la somme des chiffres de leurs dizaines est égale à la somme des chiffres de leurs unités. »
   Elle veut prouver que sa conjecture est vraie.
   Pour cela, elle décompose dans la base 10 chacun des nombresn_1 et n_2 :
   $$n_1 = 10d_1 + u_1 \text{ et } n_2 = 10d_2 + u_2$$
   où d_1 et d_2 sont les chiffres des dizaines respectifs de n_1 et n_2, u_1 et u_2 sont les chiffres des unités respectifs de n_1 et n_2.
   Prouver que la somme des nombres n_1 et n_2 est égale à la somme des renversés de n_1 et n_2 si, et seulement si, $d_1 + d_2 = u_1 + u_2$.
2. Sophie s'intéresse aussi aux nombres renversés à trois chiffres. Après plusieurs essais sur la somme de deux nombres à trois chiffres et celle de leurs renversés, elle conjecture la proposition suivante, appelée P_2 :
   « La somme de deux nombres entiers à trois chiffres n_1 et n_2 (non multiples de 10) est égale à la somme de leurs renversés, *si, et seulement si*, la somme des chiffres de leurs centaines est égale à a somme des chiffres de leurs unités. »
   a. Donner un couple de deux nombres entiers à trois chiffres qui vérifie cette propriété.
   b. Par une démarche analogue à celle proposé au b) ci-dessus, démontrer la proposition P_2.
   Indication : On pourra noter c le chiffre des centaines d'un nombre à trois chiffres, d le chiffre des dizaines, u le chiffre des unités...

3. Sophie veut généraliser les propriétés P_1 et P_2 aux nombres entiers à quatre chiffres. Elle énonce la proposition suivante :

« La somme de deux nombres entiers à quatre chiffres n_1 et n_2 (non multiples de 10) est égale à la somme de leurs renversés si la somme des chiffres des milliers est égale à la somme des chiffres de leurs unités. »

a. La somme des nombres 3 141 et 2 034 est-elle égale à la somme de leurs renversés ? La proposition de Sophie est-elle vraie ? Que constate-t-on sur la somme de ces deux nombres et celles de leurs renversés ?

b. Compléter les cases par des entiers naturels **distincts** dans les nombres à quatre chiffres ci-après pour que leur somme soit égale à celle de leurs renversés : 3□□4 et 2□□1.

c. Que doit ajouter Sophie comme hypothèse dans l'écriture de sa proposition pour qu'elle soit vraie pour des nombres à quatre chiffres, avec un chiffre des centaines distinct de celui des dizaines ?

4. Qu'en est-il pour les nombres entiers à 5 chiffres (non multiples de 10) ? Enoncer une conjecture la plus précise possible.

5. Sophie envoie par mail l'énigme suivante à son ami anglais Alan :

"I'm an odd number between 54 and 90. If I'm added to my inverted number, then this sum is an even number between 54 and 90. Who am I ?" [2]

Quel est le nombre que doit trouver Alan ?

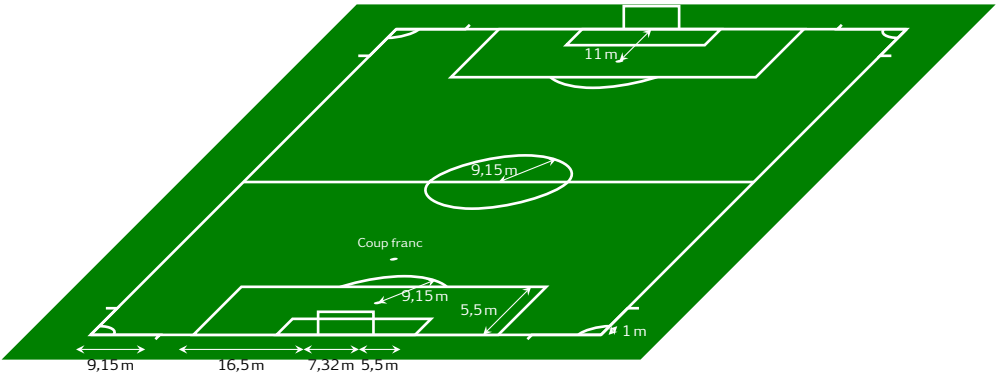
2. Traduction: "Je suis un nombre impair situé entre 54 et 90. Si on m'ajoute à mon renversé, on obtient un nombre pair situé entre 54 et 90. Qui suis-je ?"

Exercice 4. Le coup franc de la victoire

Avant la finale de la coupe du monde, Antoine Griezmann s'était entraîné à tirer des coups francs directs.
Il cherchait à déterminer, en fonction de la distance du but à laquelle il se trouvait, un moyen d'envoyer le ballon se loger dans la lucarne (l'un des deux coins hauts du but) du gardien adverse.
On suppose que la trajectoire d'un coup franc direct est décrite par une parabole du plan. On néglige toute force extérieure pouvant modifier la trajectoire du ballon (frottements de la pelouse sur le ballon, vent, etc.). **On prendra pour origine du repère l'endroit où est placé le ballon pour le coup franc**.
On rappelle les dimensions suivantes (voir figure de gauche) pour un terrain de football :

- le but mesure **2,44 mètres de haut** pour **7,32 mètres de long** ;
- la surface de réparation mesure **16,50 mètres de large** ;
- pour tirer un coup franc, le gardien adverse peut placer son mur de joueurs à 9,15 mètres de l'endroit où l'arbitre a donné la faute, et où est placé le ballon. Afin de simplifier les calculs, **nous considérons que le mur est placé à 9,50 mètres du ballon**.

1. L'arbitre accorde un coup franc à l'équipe d'Antoine Griezmann, situé à 26 mètres de la ligne de but du gardien (voir figures I.5). Afin de mettre le ballon hors de portée du gardien, Antoine Griezmann décide d'envoyer le ballon en face de lui, à une hauteur de 2 mètres. Il devra cependant faire passer son ballon au-dessus du mur de joueurs, d'une taille de 1,85 mètre. Nous supposerons dans un premier temps que le mur reste immobile au sol. Déterminer **une** fonction f permettant de réaliser un tel coup franc.
2. À l'aide de votre fonction précédemment trouvée, déterminer à quelle distance de l'endroit où a été posé le ballon la fonction atteindra son maximum. Quel est la valeur de ce maximum ?
3. On suppose maintenant, en plus des hypothèses de la question 1., que **le mur saute verticalement d'une hauteur de 35 cm** afin de gêner Antoine Griezmann, et que la trajectoire du ballon qu'il envoie atteint son maximum en $x = 17$ mètres. Dans ces conditions, est-il possible de déterminer une fonction g permettant à Antoine Griezmann de marquer un but ? Si oui, la déterminer.
4. On souhaite écrire un algorithme permettant de savoir si la fonction choisie permet de marquer un but ou non. Compléter les deuxièmes lignes de chaque condition dans l'algorithme afin qu'il permette de répondre au problème.



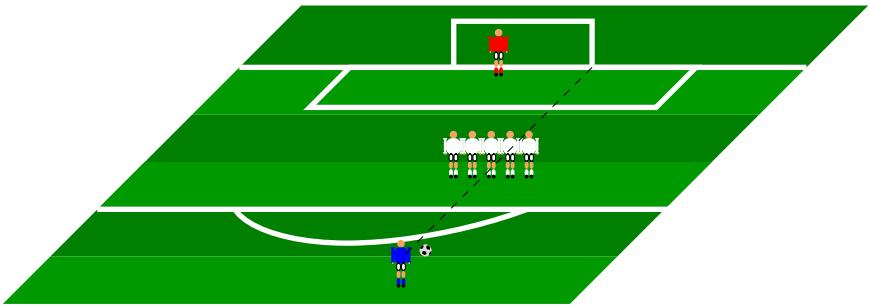


Figure I.5

```
Données : Saisir a, b et c
si x == 9.5 alors
    si ax^2 + bx + c ..... alors
        renvoyer VRAI
    sinon
        renvoyer FAUX
    fin
sinon
fin
si x == 26 alors
    si ............................... alors
        renvoyer BUT
    sinon
        renvoyer PAS BUT
    fin
sinon
fin
```

Série professionnelle

Un ordinateur doit être mis à la disposition des candidats comme lors des épreuves de CCF de mathématiques. L'épreuve se déroule par équipe.

Exercice 5. Qui est-ce ?

« Première dame » des mathématiques, cette femme fut la première à remporter la médaille Fields, plus haute récompense dans le domaine des mathématiques, en 2014.

1	2	3	4	2	1

1	5	3	6	2	7	8	2	9	5

Pour trouver le nom et le prénom de la personne recherchée, il faut effectuer les calculs indiqués ci-dessous puis identifier la lettre correspondant au résultat de ce calcul selon le principe : 1 correspond à A, 2 à B, ...

A vous de jouer !

On considère f, g et h les fonctions définies par :

$$f(x) = 2x + 3 \qquad g(x) = 2x^2 - 3x + 26 \qquad h(x) = \frac{3}{2x+3}$$

Chaque nombre à trouver est défini par les calculs suivants :

1. c'est un antécédent de 325 par la fonction g

2. c'est $h(0)$

3. L'image du nombre cherché par la fonction g est 620

4. c'est $g(1)$

5. c'est $f(3)$

6. c'est l'image de 0 par la fonction g

7. c'est l'image de 4 par la fonction f

8. l'image du nombre cherché par la fonction h est $\frac{3}{19}$

9. c'est l'antécédent de 31 par la fonction f

Exercice 6. Sudo-suites

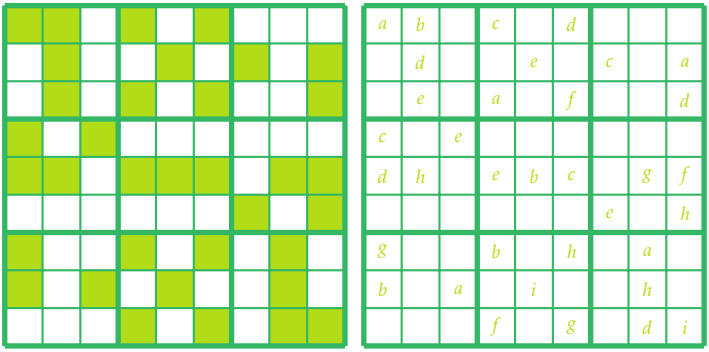


Figure I.6

règles du sudoku

Un sudoku classique contient **neuf lignes** et **neuf colonnes**, donc 81 cases au total. Le but du jeu est de remplir ces cases avec des chiffres allant de 1 à 9 en veillant toujours à ce qu'un même chiffre ne figure qu'une seule fois par colonne, une seule fois par ligne, et une seule fois par carré de neuf cases.

Chaque case grise peut être complétée à l'aide de la grille et des définitions suivantes :

A vous de jouer : compléter cette grille de sudoku !

(u_n) désigne dans chaque cas ci-dessous une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r :

- $u_2 = 2$ et $u_6 = 10$ déterminer a tel que $a = r$
- $u_1 = -9$ et $r = 2$ déterminer b tel que $\mathrm{b} = u_9$
- $r = -5$ et $u_5 = -16$ déterminer c tel que $c = u_1$
- $u_4 = 7$ et $u_{11} = 35$ déterminer d tel que $d = \dfrac{r}{4}$
- $u_{2016} = 4$ et $u_{2018} = 20$ déterminer e tel que $e = r$

(v_n) désigne dans chaque cas ci-dessous une suite géométrique de premier v_0 et de raison positive q :

- $v_1 = 0,1875$ et $q = 2$ déterminer f tel que $f = v_6$
- $v_{12} = 1,8$ et $v_{14} = 45$ déterminer g tel que $g = q$
- $q = 4$ et $v_8 = 49152$ déterminer h tel que $h = v_1$
- $v_{2015} = 27$ et $v_{2018} = 729$ déterminer i tel que $i = r^2$

Exercice 7. La prise de pouvoir

Les hommes assistent impuissants à la prise de pouvoir par des animaux. Un scientifique chercheur avait déjà imaginé en 1999 ce scénario. Il a alors mis au point un puissant vaccin qui permet d'éviter le pire et l'a ensuite placé en lieu sûr dans un coffre sécurisé par un code. Voici l'énigme qu'il a laissée à sa mort.

Personne ne veut me croire mais je suis certain de mes recherches, un jour les animaux prendront le pouvoir !
Je ne suis plus de ce monde, mais j'ai œuvré durant toute mon existence à l'élaboration d'un vaccin qui sauvera le monde. Je remets le destin de l'humanité entre les mains de celui ou celle qui saura déchiffrer les deux expériences ci-dessous et trouver le code d'accès au vaccin :

1. Pour comprendre pourquoi dans mon laboratoire je trouve des araignées rouges à pois noirs, j'ai réalisé des expériences par mélange génétique en partant d'une araignée rouge du type *Tetranuchusurticae* et d'une araignée noire du type *Latrodectusmactans*. Dès le lendemain j'ai obtenu 4 araignées rouges/noires, 25 noires/grises et 2 rouges/grises. Puis, les quantités de chaque type d'araignées doublent chaque jour pour atteindre au bout de 10 jours 2048 araignées rouges/noires. À ce rythme en combien de jours la quantité d'araignées rouges/noires atteindrait 3 mille milliards de milliards ?
2. Ma seconde expérience porte sur des lions. Chaque jour, je leur ai donné des cachets. Il m'aura fallu 442 cachets à raison de 26 par jour pour que l'expérience soit réussie ! Combien de jours a duré mon expérience ?

Le code qui sécurise le coffre est un nombre palindrome [3] à 4 chiffres composé à partir des solutions des 2 expériences.

1. Proposer une réponse à la question exposée dans la première expérience réalisée par le scientifique. Vous présenterez les différentes étapes de votre raisonnement.
2. Proposer une réponse à la question exposée dans de la seconde expérience réalisée par le scientifique. Vous présenterez les différentes étapes de votre raisonnement.
3. Présenter le(s) nombre(s) qui pourraient correspondre au code recherché.
   Ouvrir le fichier « Digicode » qui est à votre disposition sur l'ordinateur.
4. Tester chaque nombre palindrome. Quel est le nom du vaccin qui va pouvoir sauver la planète ?

3. Un nombre palindrome est un nombre qui présente une symétrie, il se lit de la même manière de gauche à droite que de droite à gauche.

Exercice 8.

da est dans un lycée de 25 classes dont les effectifs varient de 25 à 30 élèves par classe. Tous les élèves sont classés par ordre alphabétique de leur nom et à chaque nom correspond un numéro : le premier a le numéro 1, . . . , le centième a le numéro 100 et ainsi de suite. . .

Ada a remarqué que son numéro est formé de trois chiffres consécutifs et que si on avait fait la liste à l'envers, elle aurait eu comme numéro le nombre formé avec les mêmes chiffres que le premier mais écrits dans l'ordre inverse (par exemple : 789 et 987).

Combien y-a-t-il d'élèves dans ce lycée ?