Épreuve I

Académie d'Aix-Marseille

Série S (concours par équipe)

Exercice 1. Le spirographe

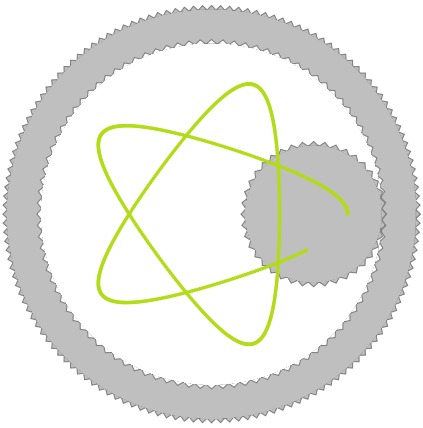

Figure I.1: *Exemple de courbe*

Le principe du spirographe est le suivant :
Un disque roule sans glissement sur le bord intérieur d'un cercle strictement plus grand.

En faisant passer la mine d'un crayon par un trou du petit disque, on obtient de magnifiques dessins !
Dans la pratique, pour assurer un bon contact entre les deux objets, ces derniers sont dentés, mais nous négligerons ici cet aspect et considérerons que le bord du grand cercle et du petit disque sont lisses.
On notera r le rayon du petit disque, R le rayon du grand cercle.
On a donc $r < R$.

Partie 1

Il arrive qu'après avoir tourné un certain temps, le petit disque revienne à sa position initiale point par point (on dira par la suite simplement qu'il est revenu à sa position initiale).
On notera k le nombre de tours effectués par le petit disque sur lui-même et n le nombre de tours du grand cercle qu'il a parcouru lorsque le retour à la position initiale se produit pour la première fois.

1. On prend $r = 3$ et $R = 12$. Justifier que $n = 1$ et $k = 4$.

2. On suppose que $R = 10$ et que r est un nombre entier.

- **a.** Le petit disque parcourt une seule fois le tour du grand cercle avant de revenir à sa position initiale. Quels peuvent être ses rayons ?
- **b.** Le petit disque parcourt exactement quatre fois le grand cercle avant de retrouver sa position initiale pour la première fois. Quel est son rayon ?

3. On suppose que r et R sont des nombres entiers.

- **a.** On prend $r = 12$ et $R = 15$. Déterminer k et n.
- **b.** Démontrer que, quels que soient les entiers r et R, le petit disque va se retrouver à sa position initiale après avoir parcouru un certain nombre de tours.

4. On considère l'algorithme ci-dessus :

Entrée : Saisir r et R
$i \leftarrow 1$;
tant que $\dfrac{iR}{r}$ *n'est pas un nombre entier* **faire**
  $i \leftarrow i + 1$;
fin

- **a.** Dans le cas où l'on saisit en entrée $r = 210$ et $R = 462$, exécuter cet algorithme pour compléter le tableau I.1 que l'on recopiera sur la copie.
- **b.** Quelles instructions peut-on rajouter à cet algorithme pour qu'il affiche en sortie les valeurs de k et n correspondantes ?
- **c.** Quelles sont alors les valeurs affichées ?

5. Dans cette question, r et R ne sont plus des entiers.

i	1				
iR	462				
$\frac{iR}{r}$	Faux				

Table I.1

a. Avec $r = 2,10$ et $R = 4.62$, le petit disque va-t-il retrouver sa position initiale ?

Si oui, quelles seront alors les valeurs de K et n ?

b. Donner des valeurs de r et R telles que le petit disque ne retrouve jamais sa position initiale.

Partie 2

On a réalisé de magnifiques dessins en faisant passer la mine d'un crayon dans un trou situé à une distance a du centre du petit disque. On sait de plus que r, R et a sont des entiers.
On s'appuiera sur l'observation de ces figures pour répondre aux questions suivantes.

1. Sur la figure I.1, à gauche, a été réalisée dans un grand cercle de 15 cm de rayon, centré sur l'origine du repère. Au départ, l'origine, le centre du petit disque et le trou sont alignés dans cet ordre, à droite sur l'axe des abscisses.

Déterminer le rayon r du petit disque ainsi que la distance a du trou au centre de ce dernier.

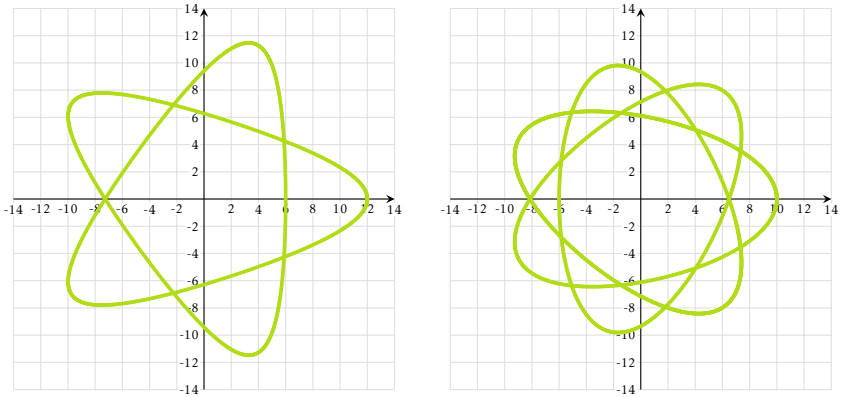

Figure I.2: *Les deux courbes*

2. À droite sur la figure I.2, on ne connaît pas les dimensions du petit disque et du grand cercle qui ont permis de la réaliser.

a. Déterminer les entiers k et n.

b. Déterminer les entiers a, r, et R.

Partie 3

Un petit disque de rayon $r = 3$ tourne dans un grand cercle de rayon $R = 10$ centré sur l'origine d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$.
La pointe du crayon est située en C, à une distance $a = 2$ du centre O' du petit disque.
Initialement O, I, O' et C sont alignés dans cet ordre.
Donner les coordonnées du dernier point dessiné lorsque le grand cercle a été parcouru une seule fois.
(On pourra utiliser les notations suggérées sur la figure ci-contre qui n'est pas à l'échelle)

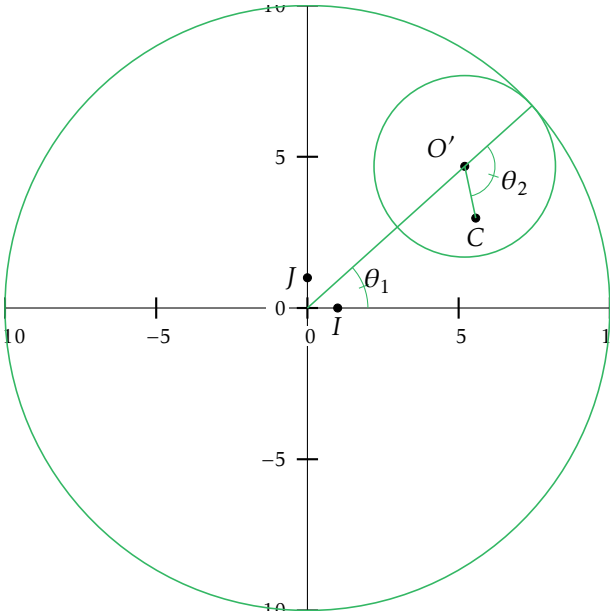

Figure I.3: *La figure n'est pas à l'échelle*

Figure I.4: *Exemple de situation*

Exercice 2. Pierre-Feuille-Ciseaux

Pierre-Feuille-Ciseaux est un jeu où deux joueurs font simultanément une figure avec leurs mains : une pierre, une feuille ou des ciseaux. La pierre gagne contre les ciseaux, les ciseaux gagnent contre la feuille, la feuille gagne contre la pierre.
Dans cet exercice, vous cherchez à programmer un robot qui va affronter un autre robot dans une partie de pierre-feuille-ciseaux. Le robot adverse utilise des stratégies différentes, et vous devrez trouver la meilleure stratégie pour jouer contre lui.
On dira qu'une stratégie est meilleure qu'une autre si elle donne une meilleure probabilité de gagner, et en cas d'égalité, une plus faible probabilité de perdre.
Notations à respecter dans cet exercice :

- *On notera* **P**, *respectivement* **F**, *respectivement* **C** *les événements : le robot adverse joue Pierre, Feuille ou Ciseaux.*
- *On notera* **p**, *respectivement* **f**, *respectivement* **c** *les événements : votre robot joue pierre, feuille ou ciseaux.*
- *Les événements V, D, N correspondent aux résultats d'une manche : Victoire de votre robot, Défaite de votre robot, ou match Nul.*
- *Si une partie est constituée de plusieurs manches, on notera par exemple V_n l'événement : « votre robot gagne la n-ième manche ».*

1. Séquence répétée

Le robot adverse a été programmé pour jouer systématiquement la séquence **PFCPFCPFC**... Il a joué **P** au coup précédent. Vous pouvez programmer les trois coups suivants. Quelle séquence programmez-vous ?

2. Jeu au hasard

Le robot adverse a été programmé pour jouer au hasard l'une des trois figures, de manière équiprobable.

a. Vous programmez votre robot de la même manière. Calculer la probabilité que votre robot gagne la partie.

b. Vous pouvez programmer les probabilités p_1 et p_2 avec lesquelles votre robot doit jouer **p** ou **f**.

Quel calcul doit effectuer votre robot pour connaître la probabilité p_3 avec laquelle il doit jouer **c** ?

c. Montrer que quelles que soient les probabilités p_1 et p_2 avec lesquelles vous programmez votre robot, la probabilité qu'il gagne la partie reste la même.

3. Figure préférée

Le robot adverse a été programmé pour jouer **P** avec une probabilité de 1/2, **F** et **C** avec une probabilité de 1/4. Vous hésitez entre trois stratégies :

- Stratégie 1 : jouer systématiquement **f**.
- Stratégie 2 : jouer **f** avec une probabilité de 1/2, les deux autres figures avec une probabilité de 1/4.
- Stratégie 3 : jouer au hasard de manière équiprobable l'une des trois figures.

Quelle est la meilleure de ces trois stratégies ?

4. Réaction au résultat de la manche précédente

Le robot adverse a été programmé pour jouer en fonction du résultat de la manche précédente :

- S'il a gagné la manche précédente, il rejoue la même figure.
- S'il a perdu la manche précédente, il joue au hasard l'une des deux figures qu'il n'a pas jouées, de manière équiprobable.
- S'il a fait match nul lors de la manche précédente, il joue au hasard l'une des trois figures de manière équiprobable.

a. On suppose que lors de la manche précédente, le robot adverse a joué **P**. Décrire la meilleure stratégie, en expliquant ce que doit jouer votre robot, en fonction du résultat (V, D ou N) de la manche précédente.

Pour les 5 questions suivantes, on suppose que vous avez programmé votre robot pour qu'il applique cette stratégie.

b. Au premier coup de la partie, les deux robots ont joué au hasard de manière équiprobable l'une des trois figures. Calculer alors la probabilité $p(V_2)$ que votre robot gagne la seconde manche.

c. Exprimer $p(V_{n+1})$, $p(D_{n+1})$ et $p(N_{n+1})$ en fonction des probabilités $p(V_n)$, $p(D_n)$ et $p(N_n)$.

d. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'en fin d'exécution, les variables V, D et N contiennent les probabilités que votre robot gagne, perde ou fasse match nul au cours de la 10e manche.

e. Expliquer l'utilité des 3 premières instructions de la boucle « Pour ».

f. En utilisant cet algorithme, calculer la probabilité de gagner la 10e manche.

5. Algorithme de « Minasi »

Vous pouvez programmer votre robot avec l'algorithme dit de « Minasi » :

- Le robot cherche dans l'historique de la partie les séquences d'une taille donnée similaires à la séquence en cours.
- Il calcule ensuite les fréquences avec lesquelles l'adversaire a joué **P**, **F** ou **C** à l'issue de ces séquences.
- Il fait l'hypothèse que l'adversaire va jouer **P**, **F**ou **C** avec des probabilités égales à ces fréquences et décide alors de jouer le coup qui correspond à la meilleure stratégie.

$V \leftarrow \frac{1}{3}$
$D \leftarrow \frac{1}{3}$
$N \leftarrow \frac{1}{3}$
pour *i allant de* 1 *à* .... **faire**
  $V' \leftarrow V$
  $D' \leftarrow D$
  $N' \leftarrow N$
  $V \leftarrow$ .....
  $D \leftarrow$ ....
  $N \leftarrow$ ....
fin

L'historique de la partie en cours est :

P p C p F c C c F c P f F f P c C p C f C c F c F p P f F c P f F c C c F c

Ce qui veut dire que votre adversaire a joué **P** et vous **p**, puis il a joué **C** et vous **p**, et ainsi de suite jusqu'à la dernière manche où votre adversaire a joué **F** et vous **c**.

a. **Séquences de taille 1** (séquence en cours : **c**).
   Dénombrer dans l'historique de la partie ce qu'a joué l'adversaire après que votre robot a joué **c**.
   Que va jouer votre robot si vous le programmez pour qu'il analyse les séquences de taille 1 ?

b. **Séquences de taille 2** (séquence en cours : **F**, **c**).
   Dénombrer dans l'historique de la partie ce qu'a joué l'adversaire après que la séquence **F**, **c** s'est produite.
   Que va jouer votre robot si vous le programmez pour qu'il analyse les séquences de taille 2 ?

c. **La plus grande séquence**
   Votre robot est programmé pour baser sa décision sur la plus grande séquence similaire à une séquence en cours qui apparait précédemment dans l'historique de la partie.
   Que va jouer votre robot ?

Sections autres que S (concours par équipe)

Exercice 3. Les colliers de Louise

Partie 1

Pour son anniversaire, Louise a reçu un coffret de perles. Il contient 8 types de perles différents en grande quantité. On notera A, B, C, D, E, F, G, H les 8 types de perles différents. Elle réalise des bracelets de 6 perles.
Lorsqu'elle referme le bracelet, on ne voit plus le fermoir et elle se rend compte que plusieurs enfilements différents peuvent donner exactement le même bracelet. Sur la figure I.5, un bracelet obtenu avec un enfilement.

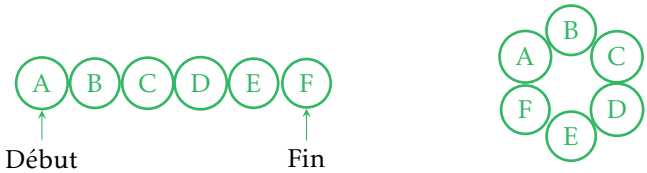

Figure I.5: *Exemple de bracelet*

1. Donner un exemple de deux enfilements différents donnant le même bracelet.
2. Combien d'enfilements sont possibles avec 6 perles de types différents (par exemple A, B, C, D, E et F) ?
3. Combien d'enfilements différents permettent de réaliser le bracelet de l'image I.6 ?

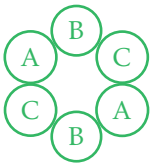

Figure I.6: *Exemple de bracelet*

4. Proposer un bracelet qui peut être réalisé par exactement 3 enfilements différents.
5. Elle réalise maintenant des enfilements de 6 perles en les choisissant une à une *au hasard* dans la boîte.
   a. Combien d'enfilements différents peut-elle réaliser ?
   b. Quelle est la probabilité que l'enfilement réalisé ne contienne pas deux perles de même type ?

Partie 2

Pour Noël, Louise a reçu le « Mega coffret création » contenant 300 types de perles différents, en grande quantité.

1. Elle réalise des enfilements de 50 perles en les choisissant une à une au hasard.

a. Sachant que $3^{50} \approx 7{,}18 \times 10^{23}$, écrire en notation scientifique une valeur approchée du nombre d'enfilements différents qu'elle peut réaliser.

b. Justifier que le calcul suivant donne la probabilité qu'un enfilement ne contienne pas deux perles de même type :

$$\frac{300}{300} \times \frac{299}{300} \times \cdots \times \frac{251}{300}.$$

c. Louise pense qu'elle a plus de chances de réaliser un collier avec des perles toutes différentes que de réaliser un collier avec au moins deux perles identiques. Êtes-vous d'accord avec Louise ?

2. a. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il affiche-en sortie la probabilité qu'un enfilement de 50 perles ne contienne pas deux perles de même type.

Exercice national, les grands pairs...

```
p = 1
for i in range(1,...) :
    p = ....

 print(...)
```

b. Exécuter cet algorithme et donner la valeur affichée en sortie.

c. Ce résultat confirme-t-il votre opinion à la question 1.c. ?

Partie 3

Louise veut maintenant ranger ses colliers dans des boîtes pour les offrir. Elle dispose de boîtes carrées, triangulaires, ou hexagonales. Elle souhaite savoir laquelle choisir pour que ses colliers s'y imbriquent parfaitement.

1. Louise a déjà enfilé 50 perles pour un collier qu'elle veut offrir à sa mère. Peut-elle trouver une boîte qui convienne ?

Sinon combien de perles au moins doit-elle rajouter pour pouvoir le ranger parfaitement dans l'une des boîtes ?

2. Proposer une formule littérale donnant le nombre de perles que doit comporter un collier pour s'imbriquer parfaitement dans une boîte carrée de côté n.

APMEP

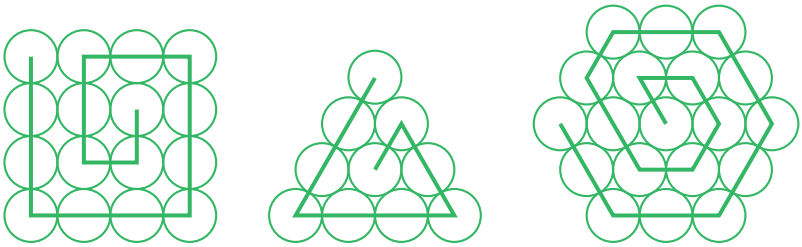

Figure I.7: *Collier s'intégrant dans les différentes boîtes*

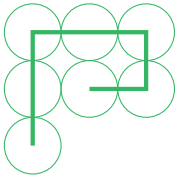

Figure I.8: *Bracelet ne s'imbriquant pas dans une boîte carrée*

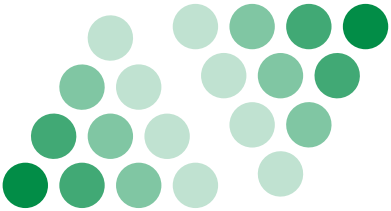

Figure I.9

Côté de la boite triangulaire	Nombre de perles
1	1
2	3
3	6
4	10
5	15
.....	.....

Table I.2

3. À l'aide du tableau I.2 et du schéma I.9 proposer une formule donnant le nombre de perles que doit comporter un collier pour s'imbriquer parfaitement dans une boîte triangulaire de côté n.
4. Combien de perles comporte le plus petit collier de plus de 500 perles pouvant s'imbriquer parfaitement dans une boîte triangulaire ?
5. À l'aide du schéma I.10, montrer que le nombre de perles que doit comporter

un collier pour s'imbriquer parfaitement dans une boîte hexagonale est égal à :

$$S_n = 1 + 6\frac{n(n-1)}{2}$$

où n est le nombre de « couches » à partir du centre. La couche 1 étant occupée par la perle centrale. Le schéma I.10 comporte donc 5 couches.

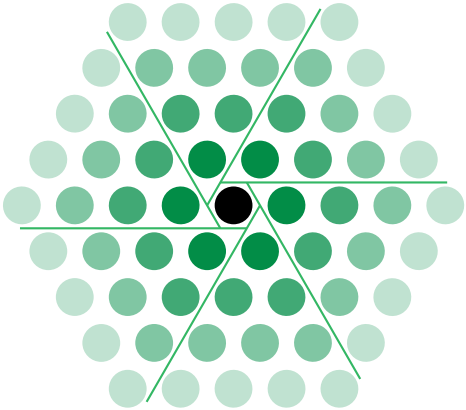

Figure I.10

6. Montrer qu'un collier comportant 1 027 perles peut s'imbriquer parfaitement dans une boîte hexagonale.

7. Déterminer le collier le plus long contenant moins de 500 perles qui pourrait s'imbriquer parfaitement dans l'une des boîtes.

8. Proposer un collier de plus de 3 perles pouvant s'imbriquer parfaitement à la fois dans une boîte hexagonale et dans une boîte triangulaire.