Corrigé de l'exercice 1.

Partie 1

1. On a $k \times 2\pi \times 3 = n \times 2\pi \times 12$, soit $k = 4n$. Comme, c'est le premier retour, $n = 1$ et $k = 4$.

2. On a $n \times 2\pi \times 10 = k \times 2\pi r$, soit $10n = kr$.

a. Dans ce cas $n = 1$, et $kr = 10$, soit $k = 1$, $r = 10$, $k = 2$ et $r = 5$, ainsi que $k = 5$ et $n = 2$.

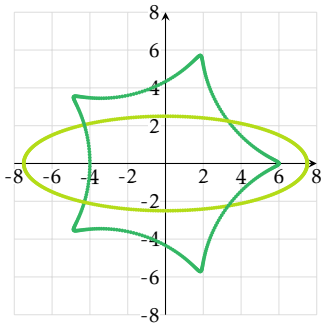

Figure 1: *Le cas $R = 10$ et $r = 5$ et le cas $R = 10$ et $r = 2$*

b. $kr = 40$. Les diviseurs de 40 sont 1, 2, 4, 5, et r est l'un deux.

- Si $r = 1$, alors $k = 10n$, comme n doit être le plus petit possible, $n = 1$, or $n = 4$, donc impossible.
- Si $r = 2$, alors $2k = 10n$, $k = 5$ et $n = 1$. Impossible.
- Si $r = 4$ alors $2k = 5n$, $k = 5$ et $n = 2$. Impossible.
- Si $r = 5$ alors $k = 2n$, $k = 2$ et $n = 1$. Impossible.
- Si $r = 8$ alors $4k = 5n$, $k = 5$ et $n = 4$. C'est donc la seule solution.

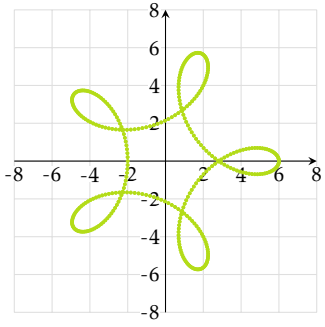

Figure 2: *Le cas $R = 10$ et $r = 8$*

3. **a.** $r = 12$ et $R = 15$, donc $12k = 15n$, soit $4k = 5n$. Le plus petit n possible est alors 4 et $k = 5$.

b. On a toujours $Rn = kr$, en prenant $k = R$ et $n = r$, l'égalité est vérifiée.

4. **a.** On obtient le tableau 1.

i	1	2	3	4	5
iR	462	924	1386	1848	2310
$\dfrac{iR}{r}$	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux

Table 1

b. Il suffit d'ajouter les variables $k \leftarrow \dfrac{iR}{r}$ et $n \leftarrow i$, et une instruction d'affichage de ces 2 variablles.

c. $k = 11$ et $n = 5$.

5. **a.** Oui, le petit disque reviendra à la même position, avec $k = 11$ et $n = 5$. C'est le cas précédent, avec un changement d'unité.

b. Le petit disque ne reviendra pas à sa position, si on prend l'un des disques entiers et l'autre irrationnel. Par exemple $r = 1$ et $R = \sqrt{2}$.

Partie 2

1. En notant, O le centre du grand cercle, O' celui du petit cercle, et C la position de la mine du crayon. Au départ, on a O, O' et C alignés dans cet ordre. C est donc en $(12\,;0)$. On a donc $R - r + a = 12$.

Lorsque C est en $(6\,;0)$, on a $R - r - a = 6$.

On a donc $2R - 2r = 18$, soit $30 - 18 = 2r$, et donc $r = 6$. On en déduit que $a = 12 - 15 + 6 = 3$.

2. **a.** La figure coupe 3 fois la partie positive de l'axe des abscisses, donc $n = 3$, et il y 7 demi-tours, donc $k = 7$.

b. On a

$$\begin{cases} R - r + a &= 10 \\ R - r - a &= 6 \end{cases}$$

On en déduit que $2a = 4$, et donc que $a = 2$. Donc, $R - r = 8$. Les relations entre k, n, r et R donne $7r = 3R$. Ce qui donne $7r = 24 + 3r$, soit $4r = 24$ et donc $r = 6$, et donc $R = 14$.

Partie 3

Au bout d'un tour du grand cercle, on aura $2\pi \times 10 = 3|\theta_2|$. Donc $|\theta_2| = 3 \times 2\pi + \dfrac{2\pi}{3}$. Comme, θ_2 est rétrograde par rapport, à θ_1, on $\theta_2 = -\dfrac{2\pi}{3}$.

On en déduit que les coordonnées de C dans le repère d'origine O' sont : $\left(-2\times\frac{1}{2};-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, d'où on déduit que les coordonnées de C sont :

$$C\left(6;-\sqrt{3}\right).$$

Corrigé de l'exercice 2.

1. Le robot va jouer **FCP**. On joue donc **cpf**.

2. **a.** On joue chacun une fois. On obtient le tableau 2.

	p	f	c
P	N	V	D
F	D	N	V
C	V	D	N

Table 2

On en déduit que la probabilité de gagner est 1/3.

b. Le robot doit effectuer $p_3 = 1 - p_1 - p_2$.

c. En utilisant un arbre de probabilité de la figure 3. Les événements sont

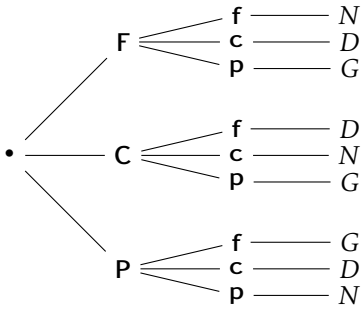

Figure 3

indépendants, on a donc : $p = \frac{1}{3}p_1 + \frac{1}{3}p_2 + \frac{1}{3}(1 - p_1 - p_2) = \frac{1}{3}$.

3. Calculons les probabilités de gain dan les différents cas :

- Stratégie 1 : $p(V) = \frac{1}{2}$. Gain seulement dans le cas **P**.
- Stratégie 2 : gain lorsque qu'il y a **Pf**, **Fc** et **Cp**. Soit

$$p(V) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\times\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{2+1}{8} = \frac{3}{8}.$$

- Stratégie 3 : $\frac{1}{3}$.

La meilleure stratégie est donc la première.

4. **a.** Le dernier coup joué par le robot est **P**.

- La partie est une défaite D, l'adversaire rejoue **P**, en jouant **f**on gagne.
- La partie est un gain V, l'adversaire joue au hasard **C** ou **F**. En jouant **c**, on assure le gain ou le nul.
- La partie est un nul N, l'adversaire joue au hasard, il n'y a pas de stratégie autre que le hasard, d'après la question 2.

b. Traçons l'arbre de probabilité.

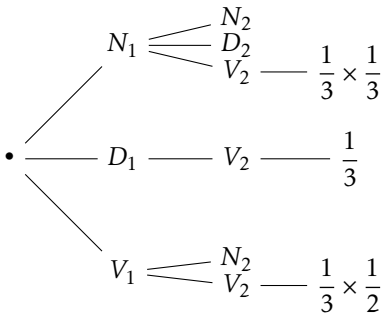

Figure 4

On en déduit que $p(V_2) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{2} = \frac{11}{18}$.

c. L'arbre permet de déterminer les relations de récurrence des suites $p(V_n)$, $p(D_n)$ et $p(N_n)$.

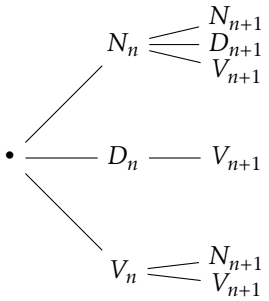

Figure 5

Cela permet d'écrire :

- $p(V_{n+1}) = \frac{1}{2}p(V_n) + p(D_n) + \frac{1}{3}p(N_n)$.
- $p(D_{n+1}) = \frac{1}{3}p(N_n)$.

- $p(N_{n+1}) = \frac{1}{2}p(V_n) + \frac{1}{3}p(N_n)$.

d. On en déduit l'algorithme complété.

$V \leftarrow \frac{1}{3}$
$D \leftarrow \frac{1}{3}$
$N \leftarrow \frac{1}{3}$
pour *i allant de* 1 *à* 10 **faire**
  $V' \leftarrow V$
  $D' \leftarrow D$
  $N' \leftarrow N$
  $V \leftarrow= V'/2 + D' + N'/3$
  $D \leftarrow= N'/3$
  $N \leftarrow V'/2 + N/3$
fin

e. Ces trois instructions permettent de sauver les valeurs des probabilités.

f. La probabilité de gagner à la 10e manche est d'environ de 0,5.

i	V	D	N	Somme
1	0.6111111111111112	0.1111111111111111	0.2777777777777778	1.0
2	0.5092592592592593	0.0925925925925926	0.3981481481481482	1.0
3	0.4799382716049383	0.13271604938271606	0.38734567901234573	1.0
4	0.5018004115226338	0.12911522633744857	0.3690843621399177	1.0
5	0.5030435528120714	0.12302812071330589	0.37392832647462276	1.0
6	0.49919267261088246	0.12464277549154092	0.3761645518975766	1.0
7	0.49962729576284104	0.12538818396585885	0.3749845202713001	1.0
8	0.5001966719377128	0.12499484009043337	0.3748084879718539	1.0
9	0.5000293387165744	0.12493616265728463	0.375034498626141	1.0
10	0.4999623315576188	0.12501149954204702	0.37502616890033424	1.0

5. a. Après un **c**, il y a eu 3 **C**, 4 **F** et 2 **P**. Il faut donc jouer **c** qui donne une probabilité de gain de 4/9 et une probabilité de défaite de 2/9.

b. Après un **F c**, il y a eu 2 **C**, 1 **F** et 2 **P**. On joue donc **p**, car la probabilité de victoire est 2/5, ainsi que celle de nul, la probabilité de défaite est de 1/5.

c. La plus grande série similaire est **cCcFc**. Le robot adverse à jouer **P**, il faudra jouer **f**.

Corrigé de l'exercice 3.

Partie 1

1. La figure 6 donne deux exemples d'enfilements différents donnant le même bracelet.

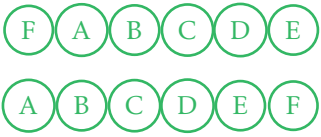

FIGURE 6: *Exemples d'enfilements donnat le même bracelet*

2. Il y a 6 choix pour la première perle, 5 pour la 2e perle, ..., soit : $6\times5\times4\times3\times2\times1=720$ possibilités.
3. Le motif se répète une fois, il y a donc $3\times2\times1=6$ possibilités.
4. **a.** Pour chaque perle, il y a 6 possibilités, soit $6^6=46\,656$.
   b. Il y a 720 possibilités avec des perles de couleurs toutes différentes, et 46 656 au total, soit $\dfrac{720}{46\,656}=\dfrac{5}{324}$.

Partie 2

1. **a.** Il y a donc $300^{50}=3^{50}\times100^{50}\approx7{,}18\times10^{23}\times10^{100}=7{,}18\times10^{123}$.
   b. Il y a 300^{50} enfilements possibles. Pour la première perle, il y a 300 choix, la 2e 299, la 3e 298, ... et 251 choix possibles pour la 50e. Donc la probabilité est :
   $$\frac{300\times299\times\ldots\times251}{300\times300\times\ldots300}=\frac{300}{300}\times\frac{299}{300}\times\ldots\frac{251}{300}.$$
   c. Les événements « avoir des perles toutes différentes », de probabilité p, et « avoir au moins deux perles identiques », de probabilité q, sont complémentaires. Donc $p=1-q$. RESTE À CONCLURE.
2. **a.** L'algorithme complété donne :

Exercice national, les grands pairs...

```
p = 1
for i in range(1,51) :
    p = p *(300 - i)/300
print(p)
```

   b. La valeur affichée par p est : 0,0132. La probabilité d'avoir des perles toutes différentes est inférieure à la probabilité d'avoir au moins deux couleurs différentes.
   c. Cela confirrme donc l'opinion de la question 1.c.

Partie 3

1. • Pour une boîte carrée, les colliers s'imbriquant parfaitement contiennent : 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64.... Donc, le collier ne s'imbrique pas dans une boîte carrée. Il faut 14 perles de plus.

- Pour une boîte triangulaire, les colliers s'imbriquant parfaitement contiennent : 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55.... Donc, le collier ne s'imbrique pas dans une boîte triangulaire, il faut 5 perles de plus.
- Pour une boîte hexagonale, les colliers s'imbriquant parfaitement contiennent : 1, 7, 19, 37, 61.... Donc, le collier ne s'imbrique pas dans une boîte hexagonale. Il faut rajouter 11 perles de plus.

2. Dans une boîte carrée de côté, les colliers qui s'imbriquent parfaitement comporte n^2 perles.

3. Le schéma comporte 2 fois les nombres triangulaires, il comporte $n(n+1)$ perles. Donc les nombres triangulaires sont donnés par la formule :

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

4. Soit n le nombre de rang dans la boîte triangulaire. Alors $\frac{n(n+1)}{2} \geqslant 500$, soit $n(n+1) \geqslant 1000$. Donc, n doit être proche de la racine de 1000, soit environ 31. Or $31 \times 32 = 992$ et $32 \times 33 = 1056$. Le collier doit donc contenir 528 perles au minimum.

5. Le schéma se décompose en 6 nombres triangulaires de rang $n-1$ plus la bille centrale. On a donc :

$$6\frac{n(n-1)}{2} + 1.$$

6. On doit avoir l'égalité : $1 + 6\frac{n(n-1)}{2} = 1027$, soit $n(n-1) = 342$, soit $n = 19$.

Un collier de 1027 perles tient dans une boîte hexagonale de côté 19.

7. Avec une boîte carré de 22 de côté, on met 484 perles, avec une boîte triangulaire de côté 31, on met 496 perles et avec une boîte hexagonale de côté 13, on met 469 perles. Donc la boite inférieure à 500 qui comporte le plus de perles est la boîte triangulaire de côté 31.

8. Peut-démontrer que cette question n'a pas de réponse ?