Baccalauréat C Amérique du Nord septembre 1973

EXERCICE I

1. Soit n un nombre entier nature1. Déterminer, suivant n, le reste de la division par 7 de 3^n.
   En déduire le reste de la division par 7 de $(506\,390)^{128}$.
2. Quel doit être le chiffre x des unités du nombre $651x$ pour que le nombre $(506\,390)^{128} + 6,51x$ soit divisible par 7.
   N.B. - Tous les nombres sont écrits en base dix.

EXERCICE II

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1, on considère la fonction numérique f_n de la variable réelle x définie par

$$x \longmapsto f_n(x) = x^n \cdot \mathrm{e}^x.$$

1. Démontrer que la limite de $f_1(x)$ quand x tend vers $-\infty$ est nulle.

On admettra que la limite de $f_n(x)$ quand x tend vers $-\infty$ est nulle pour toute autre valeur de n.

2. Étudier le sens de variation de la fonction f_n suivant les valeurs de l'entier naturel n.
3. Le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ étant orthonormé, tracer les courbes représentatives $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ de f_1 et f_2.
4. Calculer $I(X) = \displaystyle\int_0^X f_1\,\mathrm{d}x$.
   $I(X)$ a-t-il une limite quand X tend vers $-\infty$.

PROBLÈME

Soit $\mathscr{P}$ le plan vectoriel rapporté à la base $\left(\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.
Étant, donné un nombre réel a, on désigne par φ_a l'endomorphisme de $\mathscr{P}$ dont la matrice dans la base $\left(\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ est

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ a-2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. **a.** Déterminer a tel que φ_a ne soit pas bijectif.
   Quel est dans ce cas l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ tels qu'il existe un nombre réel k tel que

   $$\varphi_a\left(\vec{u}\right) = k\vec{u}.$$

   On trouvera que cet ensemble est la réunion de deux droites vectorielles (D_1) et (D_2), (D_1) désignant celle qui est engendrée par le vecteur $\vec{\imath} + \vec{\jmath}$.

   b. On désigne par p la projection vectorielle de $\mathscr{P}$ sur (D_1) de direction (D_2).
   Définir p et φ_4, analytiquement, en déduire l'existence d'une homothétie h telle que

   $$\varphi_4 = h \circ p.$$

   Existe-t-il d'autres endomorphismes g tels que $\varphi_4 = h \circ p$?

2. Soit P un plan affine associé à $\mathscr{P}$ et rapporté au repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$; soit f_a l'application affine d'endomorphisme associé φ_a et tel que l'image de O soit le point O′ de coordonnées $(1\,;\,3)$.

a. Définir f_a analytiquement.

b. Dans le cas où φ_a n'est pas bijective, démontrer que l'image du plan P est une droite (Δ_1) et que l'ensemble des points M de P tels que $f_a(\text{M}) = \text{O}'$ est une droite (Δ_2) que l'on précisera.

c. Soit M′ l'image d'un point M par l'application f_a.
Soit M_1 la projection de M sur (Δ_1) parallèlement à la direction de (Δ_2).
Démontrer que M′ est l'image de M_1 par une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport.

3. Dans cette question on suppose de plus que $\mathscr{P}$ est un plan vectoriel euclidien et que la base $\left(\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$ est orthonormée.

a. Déterminer a pour que l'endomorphisme φ_a soit une similitude vectorielle directe.
Donner le rapport et l'angle de cette similitude.

b. Soit f_a la similitude affine associée à cet endomorphisme.
Donner la définition analytique de f_a.
Quel est le centre ω de f_a ?
Quelles sont les images par f_a des droites (Δ_1) et (Δ_2) définies à la question 2. b ?