Baccalauréat spécialité

L'intégrale de mars à septembre 2023

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

À la fin index des notions abordées

Baccalauréat Centres étrangers Groupe 1[1] - 13 mars 2023

Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 QCM **5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la proposition choisie. Aucune justification n'est demandée.

Pour chaque question, une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Question 1 :

On considère la suite numérique (u_n) définie pour tout n entier naturel par

$$u_n = \frac{1+2^n}{3+5^n}.$$

Cette suite :

a. diverge vers $+\infty$

b. converge vers $\dfrac{2}{5}$

c. converge vers 0

d. converge vers $\dfrac{1}{3}$.

Question 2 :

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x^2 \ln x$.
L'expression de la fonction dérivée de f est :

a. $f'(x) = 2x \ln x$.

b. $f'(x) = x(2\ln x + 1)$.

c. $f'(x) = 2$.

d. $f'(x) = x$.

Question 3 :

On considère une fonction h définie et continue sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Variations de h	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On note H la primitive de h définie sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.
Elle vérifie la propriété :

a. H est positive sur $]-\infty\,;\,0]$.

b. H est croissante sur $]-\infty\,;\,1]$.

c. H est négative sur $]-\infty\,;\,1]$.

d. H est croissante sur $\mathbb{R}$.

1. Groupe 1 (A) : Burkina Faso, Côte d'Ivoire, Ghana, Guinée, Mali, Mauritanie, Sénégal et Togo.
Groupe 1 (B) : Algérie, Angola, Bénin, Cameroun, Congo, Gabon, Irlande, Niger, Nigeria, Portugal, République centrafricaine, République démocratique du Congo, Royaume-Uni, Tchad et Tunisie.
Groupe 1 (C) : Belgique – Danemark – Égypte – Guinée équatoriale – Luxembourg – Norvège – Pays-Bas - Suède.
Centres étrangers du groupe 1 (D) : Afrique du Sud – Arabie saoudite – Bahreïn – Burundi - Comores – Djibouti - Éthiopie – Jordanie – Kenya – Koweït – Madagascar – Mozambique - Qatar.
Groupe 1 (E) : Émirats arabes unis, Iran, République de Maurice.

Question 4 :

Soit deux réels a et b avec $a < b$.
On considère une fonction f définie, continue, strictement croissante sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ et qui s'annule en un réel α.
Parmi les propositions suivantes, la fonction en langage Python qui permet de donner une valeur approchée de α à $0,001$ est :

a.

```
def racine(a, b) :
    while abs(b − a) >= 0.001 :
        m = (a + b)/2
        if f(m) < 0 :
            b = m
        else :
            a = m
    return m
```

c.

```
def racine(a, b) :
    m = (a + b)/2
    while abs(b − a) <= 0.001 :
        if f(m) < 0 :
            a = m
        else :
            b = m
    return m
```

b.

```
def racine(a, b) :
    m = (a + b)/2
    while abs(b − a) >= 0.001 :
        if f(m) < 0 :
            a = m
        else :
            b = m
    return m
```

d.

```
def racine (a, b) :
    while abs (b − a) >= 0.001 :
        m = (a + b)/2
        if f(m) < 0 :
            a = m
        else :
            b = m
    return m
```

Question 5 :

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher dont 7 sont bleues et les autres vertes.
On effectue trois tirages successifs avec remise. La probabilité d'obtenir exactement deux boules vertes est :

a. $\left(\dfrac{7}{10}\right)^2 \times \dfrac{3}{10}$

c. $\dbinom{10}{2}\left(\dfrac{7}{10}\right)\left(\dfrac{3}{10}\right)^2$

b. $\left(\dfrac{3}{10}\right)^2$

d. $\dbinom{3}{2}\left(\dfrac{7}{10}\right)\left(\dfrac{3}{10}\right)^2$

EXERCICE 2 — 6 points

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Dans une grande ville française, des trottinettes électriques sont mises à disposition des usagers. Une entreprise, chargée de l'entretien du parc de trottinettes, contrôle leur état chaque lundi.

Partie A

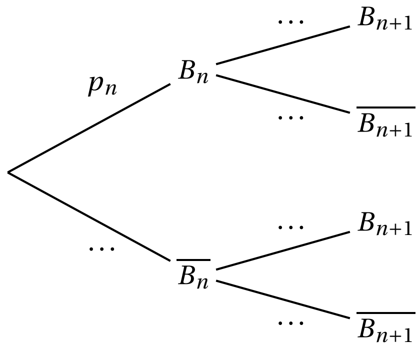
On estime que :

— lorsqu'une trottinette est en bon état un lundi, la probabilité qu'elle soit encore en bon état le lundi suivant est $0,9$;

— lorsqu'une trottinette est en mauvais état un lundi, la probabilité qu'elle soit en bon état le lundi suivant est $0,4$.

On s'intéresse à l'état d'une trottinette lors des phases de contrôle.
Soit n un entier naturel.
On note B_n l'évènement « la trottinette est en bon état n semaines après sa mise en service » et p_n la probabilité de B_n.
Lors de sa mise en service, la trottinette est en bon état. On a donc $p_0 = 1$.

1. Donner p_1 et montrer que $p_2 = 0,85$.
   On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
2. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



3. En déduire que, pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.
4. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $p_n \geqslant 0,8$.
   b. À partir de ce résultat, quelle communication l'entreprise peut-elle envisager pour valoriser la fiabilité du parc ?
5. **a.** On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = p_n - 0,8$. Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.
   b. En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n.
   c. En déduire la limite de la suite (p_n).

Partie B

Dans cette partie, on modélise la situation de la façon suivante :

- l'état d'une trottinette est indépendant de celui des autres ;
- la probabilité qu'une trottinette soit en bon état est égale à $0,8$.

On note X la variable aléatoire qui, à un lot de 15 trottinettes, associe le nombre de trottinettes en bon état.
Le nombre de trottinettes du parc étant très important, le prélèvement de 15 trottinettes peut être assimilé à un tirage avec remise.

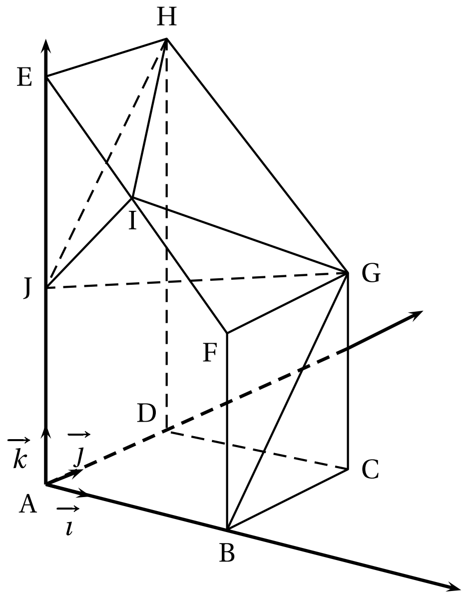
1. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité que les 15 trottinettes soient en bon état.
3. Calculer la probabilité qu'au moins 10 trottinettes soient en bon état dans un lot de 15.
4. On admet que $E(X) = 12$. Interpréter le résultat.

EXERCICE 3 **6 points**

On considère le prisme droit ABFEDCGH, de base ABFE, trapèze rectangle en A.
On associe à ce prisme le repère orthonormé $\left(A\,;\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\,,\ \vec{k}\right)$ tel que :

$$\vec{\imath} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB},\quad \vec{\jmath} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD},\quad \vec{k} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AE}.$$

De plus on a $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.
On note I le milieu du segment [EF].
On note J le milieu du segment [AE].



1. Donner les coordonnées des points I et J.
2. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.
   a. Montrer que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (IGJ).
   b. Déterminer une équation cartésienne du plan (IGJ).
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d, perpendiculaire au plan (IGJ) et passant par H.
4. On note L le projeté orthogonal du point H sur le plan (IGJ).
   Montrer que les coordonnées de L sont $\left(\frac{8}{3}\,;\ \frac{4}{3}\,;\ \frac{16}{3}\right)$.
5. Calculer la distance du point H au plan (IGJ).
6. Montrer que le triangle IGJ est rectangle en I.
7. En déduire le volume du tétraèdre IGJH.

On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :
$$V = \frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}.$$

EXERCICE 4 **3 points**

Un biologiste a modélisé l'évolution d'une population de bactéries (en milliers d'entités) par la fonction f définie sur $[0\,;\ +\infty[$ par

$$f(t) = \mathrm{e}^3 - \mathrm{e}^{-0,5t^2+t+2}$$

où t désigne le temps en heures depuis le début de l'expérience.

À partir de cette modélisation, il propose les trois affirmations ci-dessous.
Pour chacune d'elles, indiquer, en justifiant, si elle est vraie ou fausse.

- **Affirmation 1** : « La population augmente en permanence ».

- **Affirmation 2** : « À très long terme, la population dépassera 21 000 bactéries ».
- **Affirmation 3** : « La population de bactéries aura un effectif de 10 000 à deux reprises au cours du temps ».

∽ Baccalauréat Polynésie 13 mars 2023 ∾

Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 4 points **Thème : probabilités**

Les parties A *et* B *peuvent être traitées indépendamment*

Les utilisateurs de vélo d'une ville sont classés en deux catégories disjointes :

- ceux qui utilisent le vélo dans leurs déplacements professionnels ;
- ceux qui utilisent le vélo uniquement pour leurs loisirs.

Un sondage donne les résultats suivants :

- 21 % des utilisateurs ont moins de 35 ans.
  Parmi eux, 68 % utilisent leur vélo uniquement pour leurs loisirs alors que les autres l'utilisent dans leurs déplacements professionnels ;
- parmi les 35 ans ou plus, seuls 20 % utilisent leur vélo dans leurs déplacements professionnels, les autres l'utilisent uniquement pour leurs loisirs.

On interroge au hasard un utilisateur de vélo de cette ville.
Dans tout l'exercice on considère les évènements suivants :

- J : « la personne interrogée a moins de 35 ans » ;
- T : « la personne interrogée utilise le vélo dans ses déplacements professionnels » ;
- $\overline{J}$ et $\overline{T}$ sont les évènements contraires de J et T.

Partie A

1. Calculer la probabilité que la personne interrogée ait moins de 35 ans et utilise son vélo dans ses déplacements professionnels.
   On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
2. Calculer la valeur exacte de la probabilité de T.
3. On considère à présent un habitant qui utilise son vélo dans ses déplacements professionnels.
   Démontrer que la probabilité qu'il ait moins de 35 ans est $0,30$ à 10^{-2} près.

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse uniquement aux personnes utilisant leur vélo dans leurs déplacements professionnels.

On admet que 30 % d'entre elles ont moins de 35 ans.
On sélectionne au hasard parmi elles un échantillon de 120 personnes auxquelles on va soumettre un questionnaire supplémentaire.
On assimile la sélection de cet échantillon à un tirage aléatoire avec remise.

On demande à chaque individu de cet échantillon son âge.

X représente le nombre de personnes de l'échantillon ayant moins de 35 ans.

Dans cette partie, les résultats seront arrondis à 10^{-3} *près.*

1. Déterminer la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X.
2. Calculer la probabilité qu'au moins 50 utilisateurs de vélo parmi les 120 aient moins de 35 ans.

EXERCICE 2 5 points **Thème : géométrie dans l'espace**

L'espace est muni d'un repère orthonormée $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.
On considère :

- d_1 la droite passant par le point H(2 ; 3 ; 0) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$;
- d_2 la droite de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2k-3 \\ y & = & k \\ z & = & 5 \end{array}\right. \quad \text{où } k \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

Le but de cet exercice est de déterminer une représentation paramétrique d'une droite Δ qui soit perpendiculaire aux droites d_1 et d_2.

1. **a.** Déterminer un vecteur directeur $\vec{v}$ de la droite d_2.
   b. Démontrer que les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.
   c. Démontrer que les droites d_1 et d_2 ne sont pas sécantes.
   d. Quelle est la position relative des droites d_1 et d_2 ?
2. **a.** Vérifier que le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.
   b. On considère le plan P passant par le point H et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$.
   On admet qu'une équation cartésienne de ce plan est :
   $$5x+4y-z-22=0.$$
   Démontrer que l'intersection du plan P et de la droite d_2 est le point M(3 ; 3 ; 5).
3. Soit Δ la droite de vecteur directeur $\vec{w}$ passant par le point M.
   Une représentation paramétrique de Δ est donc donnée par :
   $$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -r+3 \\ y & = & 2r+3 \\ z & = & 3r+5 \end{array}\right. \quad \text{où } r \text{ décrit } \mathbb{R}.$$
   a. Justifier que les droites Δ et d_1 sont perpendiculaires en un point L dont on déterminera les coordonnées.
   b. Expliquer pourquoi la droite Δ est solution du problème posé.

EXERCICE 3 5 points **Thème : fonction exponentielle, algorithmique**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. **Affirmation :** La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - x$ est convexe.
2. **Affirmation :** L'équation $(2\mathrm{e}^x - 6)\,(\mathrm{e}^x + 2) = 0$ admet $\ln(3)$ comme unique solution dans $\mathbb{R}$.
3. **Affirmation :**
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^x - x} = 0.$$
4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (6x+5)\mathrm{e}^{3x}$ et F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$F(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{3x} + 4$.
Affirmation : F est la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 5 quand $x = 0$.
5. On considère la fonction `mystere` définie ci-dessous qui prend une liste L de nombres en paramètre.
On rappelle que `len`(L) représente la longueur de la liste L.

```
def mystere(L) :
  S = 0
  for i in range(len(L)) :
      S = S + L[i]
  return S / len(L)
```

Affirmation : L'exécution de `mystere`([1, 9, 9, 5, 0, 3, 6, 12, 0, 5]) renvoie 50.

EXERCICE 4 6 points **Thème : suites, fonctions**

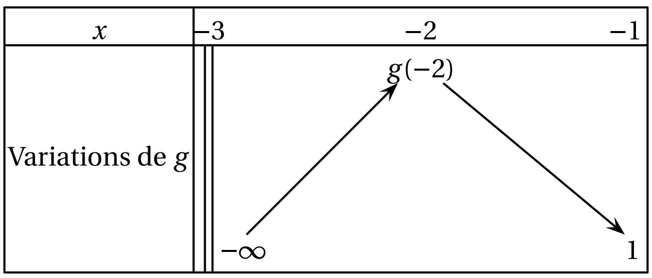
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,9u_n - 0,3.$$

1. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 0,9^n - 3$.
   b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-3 < u_n \leqslant -1$.
   c. Démontrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.
   d. Démontrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.
2. On se propose d'étudier la fonction g définie sur $]-3\,;\,-1]$ par :

$$g(x) = \ln(0,5x + 1,5) - x.$$

   a. Justifier toutes les informations données par le tableau de variations de la fonction g (limites, variations, image de -1)



   b. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ a exactement une solution que l'on notera α et dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-3}.

3. Dans la suite de l'exercice, on considère la suite (v_n) définie pour tout $\in \mathbb{N}$, par :

$$v_n = \ln(0,5u_n + 1,5)\,.$$

a. En utilisant la formule donnée à la question **1. a.**, démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison $\ln(0,9)$.

b. Soit n un entier naturel.
Démontrer que $u_n = v_n$ si, et seulement si $g(u_n) = 0$.

c. Démontrer qu'il n'existe aucun rang $k \in \mathbb{N}$ pour lequel $u_k = \alpha$.

d. En déduire qu'il n'existe aucun rang $k \in \mathbb{N}$ pour lequel $v_k = u_k$.

∾ Baccalauréat Centres étrangers Groupe 1 [2] - 14 mars 2023 ∾

Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 QCM **5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la proposition choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Pour chaque question, une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Question 1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^x$.
Une primitive F sur $\mathbb{R}$ de la fonction f est définie par :

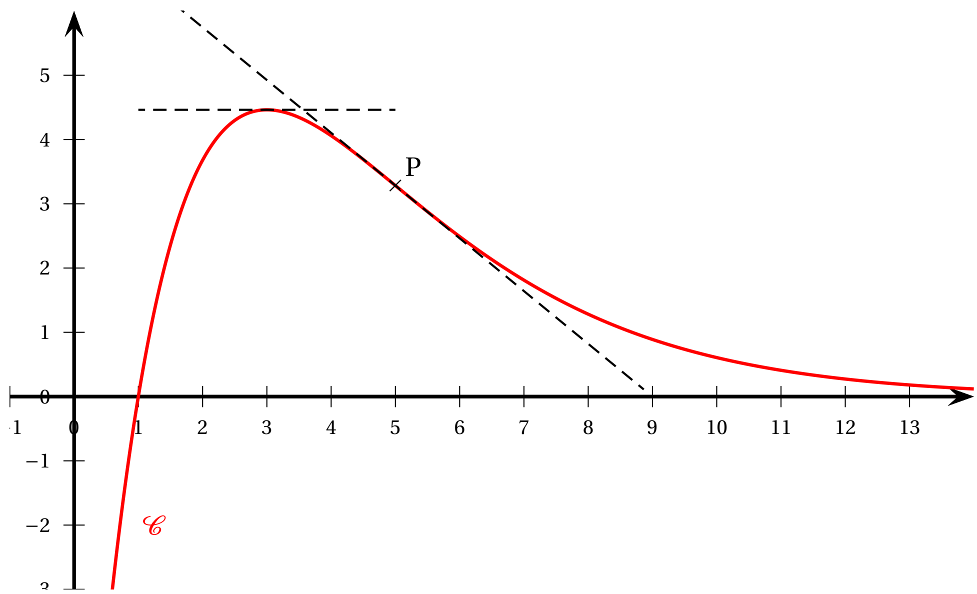
A. $F(x) = \dfrac{x^2}{2}\mathrm{e}^x$ **B** $F(x) = (x-1)\mathrm{e}^x$

C. $F(x) = (x+1)\mathrm{e}^x$ **D.** $F(x) = \dfrac{2}{x}\mathrm{e}^{x^2}$.

Question 2 :

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous représente une fonction f définie et deux fois dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$. On sait que :

- le maximum de la fonction f est atteint au point d'abscisse 3;
- le point P d'abscisse 5 est l'unique point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$.



2. Groupe 1 (A) : Burkina Faso, Côte d'Ivoire, Ghana, Guinée, Mali, Mauritanie, Sénégal et Togo.
Groupe 1 (B) : Algérie, Angola, Bénin, Cameroun, Congo, Gabon, Irlande, Niger, Nigeria, Portugal, République centrafricaine, République démocratique du Congo, Royaume-Uni, Tchad et Tunisie.
Groupe 1 (C) : Belgique – Danemark – Égypte – Guinée équatoriale – Luxembourg – Norvège – Pays-Bas - Suède.
Centres étrangers du groupe 1 (D) : Afrique du Sud – Arabie saoudite – Bahreïn – Burundi - Comores – Djibouti - Éthiopie – Jordanie – Kenya – Koweït – Madagascar – Mozambique - Qatar.
Groupe 1 (E) : Émirats arabes unis, Iran, République de Maurice.

On a :

A. pour tout $x \in]0\,;\,5[$, $f(x)$ et $f'(x)$ sont de même signe;

B. pour tout $x \in]5\,;\,+\infty[$, $f(x)$ et $f'(x)$ sont de même signe;

C. pour tout $x \in]0\,;\,5[$, $f'(x)$ et $f''(x)$ sont de même signe;

D. pour tout $x \in]5\,;\,+\infty[$, $f(x)$ et $f''(x)$ sont de même signe.

Question 3 :

On considère la fonction g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(t) = \dfrac{a}{b + \mathrm{e}^{-t}}$ où a et b sont deux nombres réels.
On sait que $g(0) = 2$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = 3$.
Les valeurs de a et b sont :

A. $a = 2$ et $b = 3$

B. $a = 4$ et $b = \dfrac{4}{3}$

C. $a = 4$ et $b = 1$

D. $a = 6$ et $b = 2$

Question 4 :

Alice dispose de deux urnes A et B contenant chacune quatre boules indiscernables au toucher.
L'urne A contient deux boules vertes et deux boules rouges.
L'urne B contient trois boules vertes et une boule rouge.
Alice choisit au hasard une urne puis une boule dans cette urne. Elle obtient une boule verte.
La probabilité qu'elle ait choisi l'urne B est :

A. $\dfrac{3}{8}$

B. $\dfrac{1}{2}$

C. $\dfrac{3}{5}$

D. $\dfrac{5}{8}$

Question 5 :

On pose $S = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{100}$.
Parmi les scripts Python ci-dessous, celui qui permet de calculer la somme S est :

a.
```
def somme_a() :
    S = 0
    for k in range(100) :
        S=1/(k+1)
    return S
```

b.
```
def somme_b() :
    S = 0
    for k in range(100) :
        S = S + 1/(k + 1)
    return S
```

c.
```
def somme_c() :
    k = 0
    while S < 100 :
        S = S+1/(k+1)
    return S
```

d.
```
def somme_d() :
    k = 0
    while k < 100 :
        S = S + 1/(k + 1)
    return S
```

EXERCICE 2 **6 points**

On considère la fonction f définie sur $]-1,5\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \ln(2x+3) - 1.$$

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = f\left(u_n\right) \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]-1,5\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.

1. Déterminer la limite de la fonction g en $-1,5$.
   On admet que la limite de la fonction g en $+\infty$ est $-\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction g sur $]-1,5\ ;\ +\infty[$.
3. **a.** Démontrer que, dans l'intervalle $]-0,5\ ;\ +\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.
   b. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B : Étude de la suite (u_n)

On admet que la fonction f est strictement croissante sur $]-1,5\ ;\ +\infty[$.

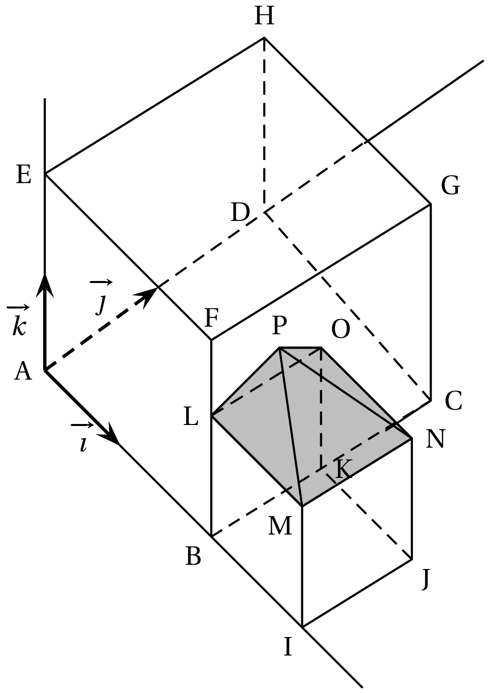
1. Soit x un nombre réel. Montrer que si $x \in [-1\ ;\ \alpha]$ alors $f(x) \in [-1\ ;\ \alpha]$.
2. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha.$$

   b. En déduire que la suite (u_n) converge.

EXERCICE 3 **6 points**

La figure ci-dessous correspond à la maquette d'un projet architectural.
Il s'agit d'une maison de forme cubique (ABCDEFGH) accolée à un garage de forme cubique (BIJKLMNO) où L est le milieu du segment [BF] et K est le milieu du segment [BC].
Le garage est surmonté d'un toit de forme pyramidale (LMNOP) de base carrée LMNO et de sommet P positionné sur la façade de la maison.



On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\,;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$, avec $\overrightarrow{\imath} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\jmath} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{k} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

1. **a.** Par lecture graphique, donner les coordonnées des points H, M et N.
   b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (HM).
2. L'architecte place le point P à l'intersection de la droite (HM) et du plan (BCF).
   Montrer que les coordonnées de P sont $\left(2\,;\ \dfrac{2}{3}\,;\ \dfrac{4}{3}\right)$.
3. **a.** Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}$.
   b. Calculer la distance PM.
   On admet que la distance PN est égale à $\dfrac{\sqrt{11}}{3}$.
   c. Pour satisfaire à des contraintes techniques, le toit ne peut être construit que si l'angle $\widehat{MPN}$ ne dépasse pas 55°.
   Le toit pourra-t-il être construit ?
4. Justifier que les droites (HM) et (EN) sont sécantes.
   Quel est leur point d'intersection ?

EXERCICE 4 — 3 points

Une société de production s'interroge sur l'opportunité de programmer un jeu télévisé. Ce jeu réunit quatre candidats et se déroule en deux phases :

- La première phase est une phase de qualification.

Cette phase ne dépend que du hasard. Pour chaque candidat, la probabilité de se qualifier est $0,6$.

- La deuxième phase est une compétition entre les candidats qualifiés.

Elle n'a lieu que si deux candidats au moins sont qualifiés.
Sa durée dépend du nombre de candidats qualifiés comme l'indique le tableau ci-dessous (lorsqu'il n'y a pas de deuxième phase, on considère que sa durée est nulle).

Nombre de candidats qualifiés pour la deuxième phase	0	1	2	3	4
Durée de la deuxième phase en minutes	0	0	5	9	11

Pour que la société décide de retenir ce jeu, il faut que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

Condition n° 1 : La deuxième phase doit avoir lieu dans au moins 80 % des cas.

Condition n° 2 : La durée moyenne de la deuxième phase ne doit pas excéder 6 minutes.
Le jeu peut-il être retenu ?

൦ Baccalauréat Polynésie 14 mars 2023 ൦

Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 5 points **Thème : probabilités, suites**

Les parties A *et* B *peuvent être traitées indépendamment*

Partie A

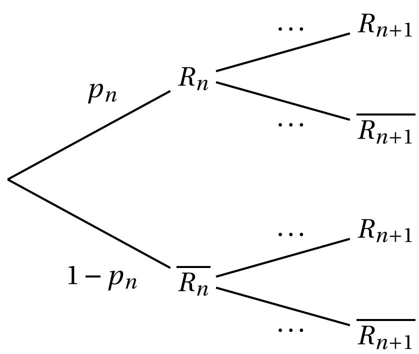
Chaque jour, un athlète doit sauter une haie en fin d'entraînement. Son entraîneur estime, au vu de la saison précédente que

- si l'athlète franchit la haie un jour, alors il la franchira dans 90 % des cas le jour suivant ;
- si l'athlète ne franchit pas la haie un jour, alors dans 70 % des cas il ne la franchira pas non plus Je lendemain.

On note pour tout entier naturel n :

- R_n l'évènement : « L'athlète réussit à franchir la haie lors de la n-ième séance »,
- p_n la probabilité de l'évènement R_n. On considère que $p_0 = 0,6$.

1. Soit n un entier naturel, recopier l'arbre pondéré ci-dessous et compléter les pointillés.



2. Justifier en vous aidant de l'arbre que, pour tout entier naturel n, on a :

$$p_{n+1} = 0,6p_n + 0,3.$$

3. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = p_n - 0,75$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b. Démontrer que, pour tout entier n naturel n :

$$p_n = 0,75 - 0,15 \times 0,6^n.$$

c. En déduire que la suite $\left(p_n\right)$ est convergente et déterminer sa limite ℓ.

d. Interpréter la valeur de ℓ dans le cadre de l'exercice.

Partie B

Apres de nombreuses séances d'entraînement, l'entraineur estime maintenant que l'athlète franchit chaque haie avec une probabilité de $0,75$ et ce indépendamment d'avoir franchi ou non les haies précédentes.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de haies franchies par l'athlète à l'issue d'un 400 mètres haies qui comporte 10 haies,

1. Préciser la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X.
2. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité que l'athlète franchisse les 10 haies.
3. Calculer $p(X \geqslant 9)$, à 10^{-3} près.

Exercice 2 5 points **Thème : géométrie dans l'espace**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.
On considère :

- le point $\mathrm{A}(1\,;\,-1\,;\,-1)$;
- le plan $\mathscr{P}_1$, d'équation : $5x + 2y + 4z = 17$;
- le plan $\mathscr{P}_2$ d'équation : $10x + 14y + 3z = 19$;
- la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+2t \\ y & = & -t \\ z & = & 3-2t \end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

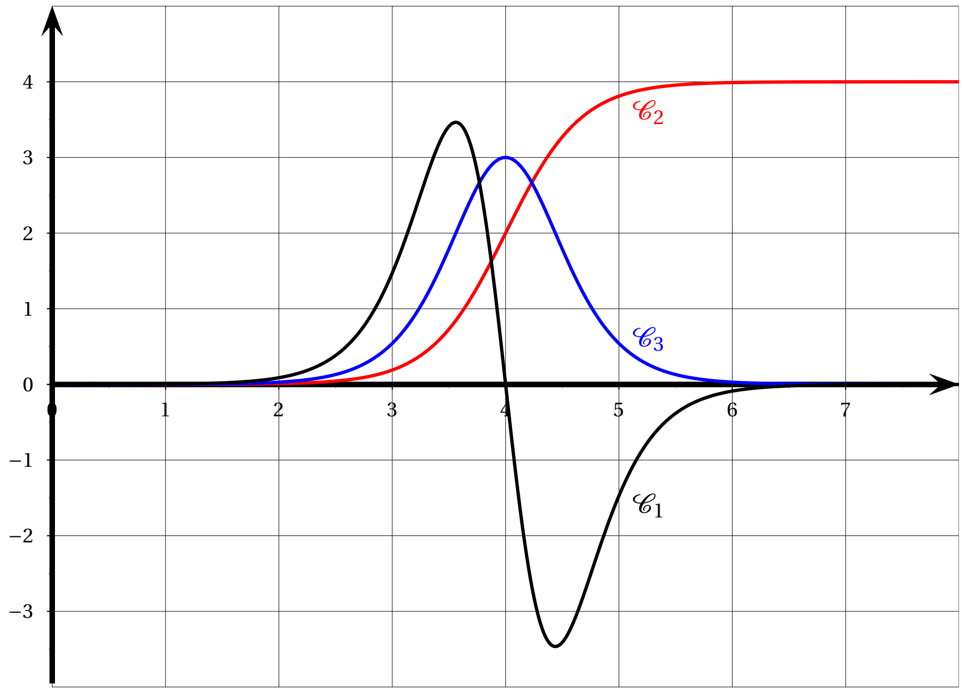
1. Justifier que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ne sont pas parallèles.
2. Démontrer que $\mathscr{D}$ est la droite d'intersection de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.
3. **a.** Vérifier que A n'appartient pas à $\mathscr{P}_1$.
   b. Justifier que A n'appartient pas à $\mathscr{D}$.
4. Pour tout réel t, on note M le point de $\mathscr{D}$ de coordonnées $(1+2t\,;\,-t\,;\,3-2t)$.
   On considère alors la fonction f qui à tout réel t associe $\mathrm{A}M^2$, soit $f(t) = \mathrm{A}M^2$.
   a. Démontrer que pour tout réel t, on a : $f(t) = 9t^2 - 18t + 17$.
   b. Démontrer que la distance AM est minimale lorsque M a pour coordonnées $(3\,;\,-1\,;\,1)$.
5. On note H le point de coordonnées $(3\,;\,-1\,;\,1)$.
   Démontrer que la droite (AH) est perpendiculaire à $\mathscr{D}$.

Exercice 3 5 points **Thème : étude de fonctions**

Les parties A *et* B *peuvent être traitées indépendamment*

Partie A

Le plan est ramené à un repère orthogonal.
On a représenté ci-dessous la courbe d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, ainsi que celle de sa dérivée f' et de sa dérivée seconde f''.



1. Déterminer, en justifiant votre choix, quelle courbe correspond à quelle fonction.

2. Déterminer, avec la précision permise par le graphique, le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_2$ au point d'abscisse 4.

3. Donner avec la précision permise par le graphique, l'abscisse de chaque point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_1$.

Partie B

Soit un réel k strictement positif.
On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{4}{1+\mathrm{e}^{-kx}}.$$

1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$,

2. Prouver que $g'(0) = k$.

3. En admettant le résultat ci-dessous obtenu avec un logiciel de calcul formel, prouver que la courbe de g admet un point d'inflexion au point d'abscisse 0.

⊳ Calcul formel	
1	g(x) =4/(1 + e^(-kx)) $\to g(x) = \dfrac{4}{\mathrm{e}^{-kx}+1}$
2	Simplifier($g''(x)$) $\to g''(x) = -4\mathrm{e}^{kx}\left(\mathrm{e}^{kx}-1\right)\dfrac{k^2}{\left(\mathrm{e}^{kx}+1\right)^3}$

EXERCICE 4 5 points **Thème : suites, fonction logarithme, algorithmique**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point :

1. **Affirmation :** La suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ est bornée.
2. **Affirmation :** Toute suite bornée est convergente.
3. **Affirmation :** Toute suite croissante tend vers $+\infty$.
4. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(x^2 + 2x + 2\right)$.
   Affirmation : La fonction f est convexe sur l'intervalle $[-3\ ;\ 1]$.
5. On considère la fonction **mystere** définie ci-dessous qui prend une liste L de nombres en paramètre.
   On rappelle que `len`(L) renvoie la longueur, c'est-à-dire le nombre d'éléments de la liste L.

```
def mystere(L) :
    M = L[0]
    # On initialise M avec le premier élément de la liste L
    for i in range(len(L)) :
        if L[i] > M :
            M = L[i]
    return M
```

   Affirmation : L'exécution de **mystere**([2, 3, 7,0 ,6, 3, 2, 0, 5]) renvoie 7.

∽ Baccalauréat Métropole [3] 20 mars 2023 ∾

Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse inexacte.
Les questions sont indépendantes.

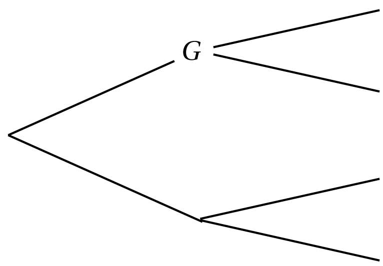
Un technicien contrôle les machines équipant une grande entreprise. Toutes ces machines sont identiques.
On sait que :

- 20 % des machines sont sous garantie ;
- 0,2 % des machines sont à la fois défectueuses et sous garantie ;
- 8,2 % des machines sont défectueuses.

Le technicien teste une machine au hasard.
On considère les évènements suivants :

- G : « la machine est sous garantie » ;
- D : « la machine est défectueuse » ;
- $\overline{G}$ et $\overline{D}$ désignent respectivement les évènements contraires de G et D.

Pour répondre aux questions 1 à 3, on pourra s'aider de l'arbre proposé ci-contre.



1. La probabilité $p_G(D)$ de l'évènement D sachant que G est réalisé est égale à :

   a. 0,002 **b.** 0,01 **c.** 0,024 **d.** 0,2

2. La probabilité $p\left(\overline{G} \cap D\right)$ est égale à :

   a. 0,01 b. 0,08 **c.** 0,1 **d.** 0,21

3. La machine est défectueuse. La probabilité qu'elle soit sous garantie est environ égale, à 10^{-3} près, à :

   a. 0,01 **b.** 0,024 **c.** 0,082 **d.** 0,1

Pour les questions 4 et 5, on choisit au hasard et de façon indépendante n machines de l'entreprise, où n désigne un entier naturel non nul.
On assimile ce choix à un tirage avec remise, et on désigne par X la variable aléatoire qui associe à chaque lot de n machines le nombre de machines défectueuses dans ce lot.
On admet que X suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,082$.

4. Dans cette question, on prend $n = 50$.
   La valeur de la probabilité $p(X > 2)$, arrondie au millième, est de :

3. Antilles-Guyane, Maroc

a. 0,136 **b.** 0,789 **c.** 0,864 d. 0,924

5. On considère un entier n pour lequel la probabilité que toutes les machines d'un lot de taille n fonctionnent correctement est supérieure à $0,4$.
La plus grande valeur possible pour n est égale à :

a. 5 **b.** 6 **c.** 10 d. 11

EXERCICE 2 **5 points**

On considère la fonction f définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - 8\ln(x)$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.
On admet que f est dérivable sur $]0~;~+\infty[$, on note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

2. On admet que, pour tout $x > 0$, $f(x) = x^2\left(1 - 8\dfrac{\ln(x)}{x^2}\right)$.
En déduire la limite : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3. Montrer que, pour tout réel x de $]0~;~+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2\left(x^2-4\right)}{x}$.

4. Étudier les variations de f sur $]0~;~+\infty[$ et dresser son tableau de variations complet.
On précisera la valeur exacte du minimum de f sur $]0~;~+\infty[$.

5. Démontrer que, sur l'intervalle $]0;2]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α (on ne cherchera pas à déterminer la valeur de α).

6. On admet que, sur l'intervalle $[2~;~+\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β (on ne cherchera pas à déterminer la valeur de β).
En déduire le signe de f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

7. Pour tout nombre réel k, on considère la fonction g_k définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$g_k(x) = x^2 - 8\ln(x) + k.$$

En s'aidant du tableau de variations de f, déterminer la plus petite valeur de k pour laquelle la fonction g_k est positive sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

EXERCICE 3 **5 points**

Une entreprise a créé une Foire Aux Questions (« FAQ ») sur son site internet.

On étudie le nombre de questions qui y sont posées chaque mois.

Partie A : Première modélisation

Dans cette partie, on admet que, chaque mois :

- 90 % des questions déjà posées le mois précédent sont conservées sur la FAQ ;
- 130 nouvelles questions sont ajoutées à la FAQ.

Au cours du premier mois, 300 questions ont été posées.

Pour estimer le nombre de questions, en centaines, présentes sur la FAQ le n-ième mois, on modélise la situation ci-dessus à l'aide de la suite (u_n) définie par :

$$u_1 = 3 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n \geqslant 1,\ u_{n+1} = 0,9u_n + 1,3.$$

1. Calculer u_2 et u_3 et proposer une interprétation dans le contexte de l'exercice.

2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n.$$

3. En déduire que la suite (u_n) est croissante.

4. On considère le programme ci-contre, écrit en langage Python.

Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de seuil(8.5) et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

```
def seuil(p) :
    n=1
    u=3
    while u<=p :
        n=n+1
        u=0.9*u+1.3
    return n
```

Partie B : Une autre modélisation

Dans cette partie, on considère une seconde modélisation à l'aide d'une nouvelle suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$v_n = 9 - 6 \times \mathrm{e}^{-0,19\times(n-1)}.$$

Le terme v_n est une estimation du nombre de questions, en centaines, présentes le n-ième mois sur la FAQ.

1. Préciser les valeurs arrondies au centième de v_1 et v_2.

2. Déterminer, en justifiant la réponse, la plus petite valeur de n telle que $v_n > 8,5$.

Partie C : Comparaison des deux modèles

1. L'entreprise considère qu'elle doit modifier la présentation de son site lorsque plus de 850 questions sont présentes sur la FAQ.

Parmi ces deux modélisations, laquelle conduit à procéder le plus tôt à cette modification ?

Justifier votre réponse.

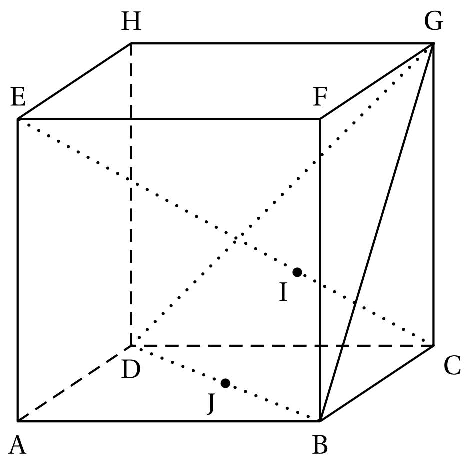
2. En justifiant la réponse, pour quelle modélisation y a-t-il le plus grand nombre de questions sur la FAQ à long terme ?

EXERCICE 4 **5 points**

On considère le cube ABCDEFCH d'arête 1.

On appelle I le point d'intersection du plan (GBD) avec la droite (EC).

L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\ \overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AD}},\ \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.



1. Donner dans ce repère les coordonnées des points E, C, G.

2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EC).

3. Démontrer que la droite (EC) est orthogonale au plan (GBD).

4. **a.** Justifier qu'une équation cartésienne du plan (GBD) est :

$$x + y - z - 1 = 0.$$

b. Montrer que le point I a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$.

c. En déduire que la distance du point E au plan (GBD) est égale à $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

5. **a.** Démontrer que le triangle BDG est équilatéral.

b. Calculer l'aire du triangle BDG.
On pourra utiliser le point J, milieu du segment [BD].

6. Justifier que le volume du tétraèdre EGBD est égal à $\frac{1}{3}$.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V = \frac{1}{3}Bh$ où B est l'aire d'une base du tétraèdre et h est la hauteur relative à cette base.

∾ Baccalauréat Métropole [4] 21 mars 2023 ∾

Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse inexacte.

Un jeu vidéo possède une vaste communauté de joueurs en ligne. Avant de débuter une partie, le joueur doit choisir entre deux « mondes » : soit le monde A, soit le monde B.

On choisit au hasard un individu dans la communauté des joueurs.
Lorsqu'il joue une partie, on admet que :

- la probabilité que le joueur choisisse le monde A est égale à $\dfrac{2}{5}$;
- si le joueur choisit le monde A, la probabilité qu'il gagne la partie est de $\dfrac{7}{10}$;
- la probabilité que le joueur gagne la partie est de $\dfrac{12}{25}$.

On considère les évènements suivants :

- A : « Le joueur choisit le monde A » ;
- B : « Le joueur choisit le monde B » ;
- G : « Le joueur gagne la partie ».

1. La probabilité que le joueur choisisse le monde A et gagne la partie est égale à :

   a. $\dfrac{7}{10}$ **b.** $\dfrac{3}{25}$ **c.** $\dfrac{7}{25}$ **d.** $\dfrac{24}{125}$

2. La probabilité $P_B(G)$ de l'événement G sachant que B est réalisé est égale à :

   a. $\dfrac{1}{5}$ **b.** $\dfrac{1}{3}$ **c.** $\dfrac{7}{15}$ **d.** $\dfrac{5}{12}$

Dans la suite de l'exercice, un joueur effectue 10 parties successives.
On assimile cette situation à un tirage aléatoire avec remise.
On rappelle que la probabilité de gagner une partie est de $\dfrac{12}{25}$.

3. La probabilité, arrondie au millième, que le joueur gagne exactement 6 parties est égale à :

   a. $0,859$ **b.** 0,671 **c.** 0,188 **d.** 0,187

4. On considère un entier naturel n pour lequel la probabilité, arrondie au millième, que le joueur gagne au plus n parties est de $0,207$. Alors :

   a. $n = 2$ **b.** $n = 3$ **c.** $n = 4$ **d.** $n = 5$

4. Antilles-Guyane, Maroc

5. La probabilité que le joueur gagne au moins une partie est égale à :

a. $1-\left(\dfrac{12}{25}\right)^{10}$ **b.** $\left(\dfrac{13}{25}\right)^{10}$ **c.** $\left(\dfrac{12}{25}\right)^{10}$ **d.** $1-\left(\dfrac{13}{25}\right)^{10}$

EXERCICE 2 **5 points**

Des biologistes étudient l'évolution d'une population d'insectes dans un jardin botanique.
Au début de l'étude la population est de 100 000 insectes.
Pour préserver l'équilibre du milieu naturelle nombre d'insectes ne doit pas dépasser 400 000.

Partie A : Étude d'un premier modèle en laboratoire

L'observation de l'évolution de ces populations d'insectes en laboratoire, en l'absence de tout prédateur, montre que le nombre d'insectes augmente de 60 % chaque mois.
En tenant compte de cette observation, les biologistes modélisent l'évolution de la population d'insectes à l'aide d'une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n modélise le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois.
On a donc $u_0 = 0,1$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n : $u_n = 0,1 \times 1,6^n$.
2. Déterminer la limite de la suite (u_n).
3. En résolvant une inéquation, déterminer le plus petit entier naturel n à partir duquel $u_n > 0,4$.
4. Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel serait-il préservé ? Justifier la réponse.

Partie B : Étude d'un second modèle

En tenant compte des contraintes du milieu naturel dans lequel évoluent les insectes, les biologistes choisissent une nouvelle modélisation.
Ils modélisent le nombre d'insectes à l'aide de la suite (v_n), définie par :

$$v_0 = 0,1 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} = 1,6v_n - 1,6v_n^2,$$

où, pour tout entier naturel n, v_n est le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois.

1. Déterminer le nombre d'insectes au bout d'un mois.
2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$ par

$$f(x) = 1,6x - 1,6x^2.$$

   a. Résoudre l'équation $f(x) = x$.

   b. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$.

3. **a.** Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

   b. Montrer que la suite (v_n) est convergente.
   On note ℓ la valeur de sa limite. On admet que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

c. Déterminer la valeur de ℓ.

Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel sera-t-il préservé ? Justifier la réponse.

4. On donne ci-contre la fonction seuil, écrite en langage Python.

```
def seuil(a) :
    v=0.1
    n=0
    while v<a :
        v=1.6*v-1.6*v*v
        n=n+1
    return n
```

a. Qu'observe-t-on si on saisit seuil(0.4) ?

b. Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de seuil(0.35).

Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 3 — 5 points

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère :

- le plan $\mathscr{P}_1$ dont une équation cartésienne est $2x + y - z + 2 = 0$,
- le plan $\mathscr{P}_2$ passant par le point B(1 ; 1 ; 2) et dont un vecteur normal est $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

1. **a.** Donner les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{n_1}$ normal au plan $\mathscr{P}_1$.

b. On rappelle que deux plans sont perpendiculaires si un vecteur normal à l'un des plans est orthogonal à un vecteur normal à l'autre plan.

Montrer que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont perpendiculaires.

2. **a.** Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}_2$.

b. On note Δ la droite dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{l c l}x &=& 0\\ y &=& -2+t\\ z &=& t\end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

Montrer que la droite Δ est l'intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

On considère le point A(1 ; 1 ; 1) et on admet que le point A n'appartient ni à $\mathscr{P}_1$ ni à $\mathscr{P}_2$.

On note H le projeté orthogonal du point A sur la droite Δ.

3. On rappelle que, d'après la question 2. b, la droite Δ est l'ensemble des points M_t de coordonnées $(0 ; -2+t ; t)$, où t désigne un nombre réel quelconque.

a. Montrer que, pour tout réel t, $AM_t = \sqrt{2t^2 - 8t + 11}$.

b. En déduire que $AH = \sqrt{3}$.

4. On note $\mathscr{D}_1$ la droite orthogonale au plan $\mathscr{P}_1$ passant par le point A et H_1 le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}_1$.

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}_1$.

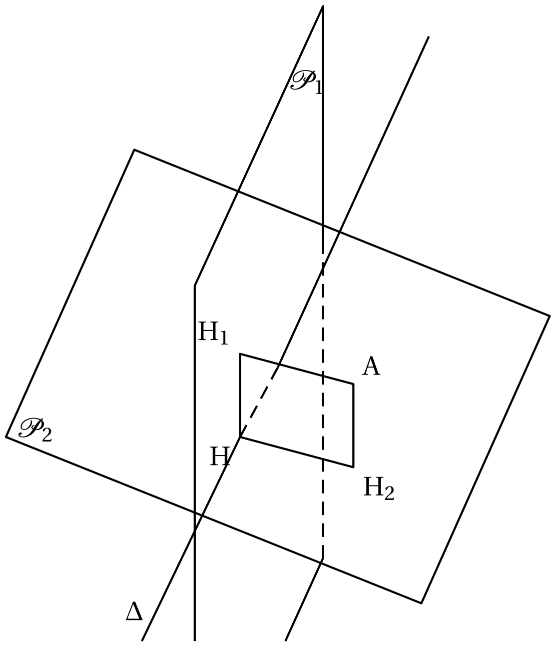
b. En déduire que le point H_1 a pour coordonnées $\left(-\dfrac{1}{3} ; \dfrac{1}{3} ; \dfrac{5}{3}\right)$.

5. Soit H_2 le projeté orthogonal de A sur le plan $\mathscr{P}_2$.

On admet que H_2 a pour coordonnées $\left(\dfrac{4}{3}\,;\,\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{4}{3}\right)$ et que H a pour coordonnées $(0\,;\,0\,;\,2)$.

Sur le schéma ci-contre, les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont représentés, ainsi que les points A, H_1, H_2, H.

Montrer que AH_1HH_2 est un rectangle.



EXERCICE 4 **5 points**

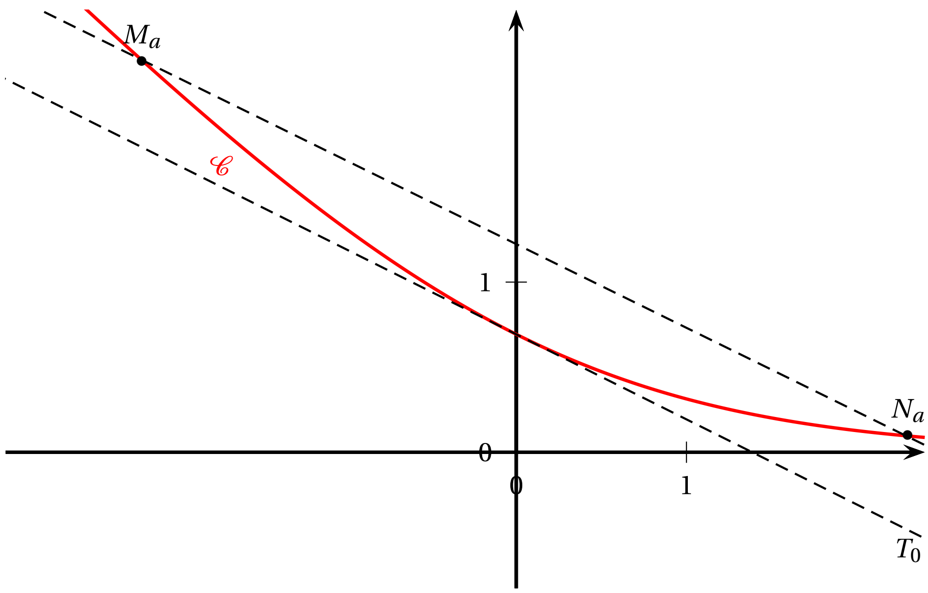
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(1 + \text{e}^{-x}\right),$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

La courbe $\mathscr{C}$ est tracée ci-dessous.



1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

   b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

   Interpréter graphiquement ce résultat.

   c. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

   Calculer $f'(x)$ puis montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \dfrac{-1}{1+\text{e}^{x}}$.

   d. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. On note T_0 la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 0.

   a. Déterminer une équation de la tangente T_0.

   b. Montrer que la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.

   c. En déduire que, pour tout nombre réel x, on a :

$$f(x) \geqslant -\frac{1}{2}x + \ln(2).$$

3. Pour tout nombre réel a différent de 0, on note M_a et N_a les points de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives $-a$ et a.

On a donc : $M_a\left(-a\,;\ f(-a)\right)$ et $N_a\left(a\,;\ f(a)\right)$.

   a. Montrer que, pour tout nombre réel x, on a : $f(x) - f(-x) = -x$.

   b. En déduire que les droites T_0 et (M_aN_a) sont parallèles.

∽ Baccalauréat Centres étrangers [5] 21 mars 2023 ∾

Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **5 points**

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$g(x) = \ln\left(x^2\right) + x - 2$$

1. Déterminer les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.
2. On admet que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
   Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
3. **a.** Démontrer qu'il existe un unique réel strictement positif α tel que $g(\alpha) = 0$.
   b. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
4. En déduire le tableau de signe de la fonction g sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{(x-2)}{x}\ln(x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en 0.
   b. Interpréter graphiquement le résultat.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
3. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
   Montrer que pour tout réel x strictement positif, on a $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
4. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$,

Partie C

Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la courbe représentative de la fonction ln sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

EXERCICE 2 **5 points**

Dans un souci de préservation de l'environnement, Monsieur Durand décide de se rendre chaque matin au travail en utilisant son vélo ou les transports en commun.
S'il choisit de prendre les transports en commun un matin, il reprend les transports en commun le lendemain avec une probabilité égale à 0,8.
S'il utilise son vélo un matin, il reprend son vélo le lendemain avec une probabilité égale à 0,4.

Pour tout entier naturel n non nul, on note :

5. Europe

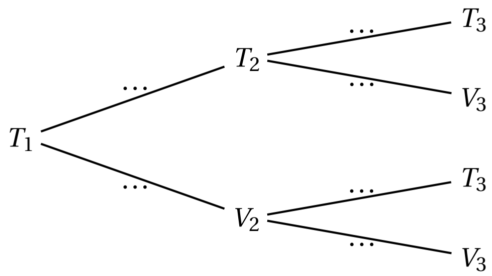
— T_n l'évènement « Monsieur Durand utilise les transports en commun le n-ième jour »

— V_n l'évènement « Monsieur Durand utilise son vélo le n-ième jour »

— On note p_n la probabilité de l'évènement T_n,

Le premier matin, il décide d'utiliser les transports en commun. Ainsi, la probabilité de l'évènement T_1 est $p_1 = 1$.

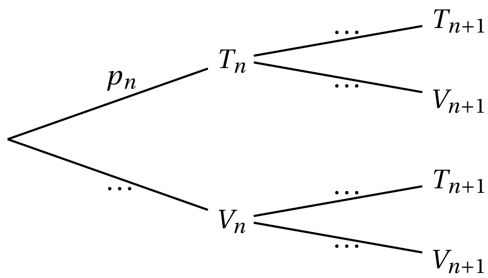
1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation pour les 2e et 3e jours,



2. Calculer p_3

3. Le 3e jour, M. Durand utilise son vélo.
Calculer la probabilité qu'il ait pris les transports en commun la veille.

4. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation pour les n-ième et $(n+1)$-ième jours.



5. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,6$.

6. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, on a

$$p_n = 0,75 + 0,25 \times 0,2^{n-1}.$$

7. Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 3 — 5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Les cinq questions sont indépendantes.

Dans tout l'exercice, $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.

1. Une primitive de la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^x$, est la fonction F, définie sur $\mathbb{R}$, par :

a. $F(x) = \dfrac{x^2}{2}\mathrm{e}^x$ **c.** $F(x) = (x+1)\mathrm{e}^x$
b. $F(x) = (x-1)\mathrm{e}^x$ **d.** $F(x) = x^2\mathrm{e}^{x^2}$

2. On considère la fonction g définie par $g(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{2x+4}\right)$.
La fonction g est définie sur :

a. $\mathbb{R}$ **c.** $]-\infty\,;\,-2[\cup]1\,;\,+\infty[$
c. $]-2\,;\,+\infty[$ **d.** $]-2\,;\,1[$

3. La fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (x+1)\mathrm{e}^x$ est :

a. concave sur $\mathbb{R}$ **c.** convexe sur $]-\infty\,;\,-3]$ et concave sur $[-3\,;\,+\infty[$
b. convexe sur $\mathbb{R}$ **d.** concave sur $]-\infty\,;\,-3]$ et convexe sur $[-3\,;\,+\infty[$

4. Une suite (u_n) est minorée par 3 et converge vers un réel ℓ.
On peut affirmer que :

a. $\ell = 3$ **c.** La suite (u_n) est décroissante.
b. $\ell \geqslant 3$ **d.** La suite (u_n) est constante à partir d'un certain rang.

5. La suite (w_n) est définie par $w_1 = 2$ et pour tout entier naturel n strictement positif, $w_{n+1} = \dfrac{1}{n}w_n$.

a. La suite (w_n) est géométrique **c.** $w_5 = \dfrac{1}{15}$
b. La suite (w_n) n'admet pas de limite **d.** La suite (w_n) converge vers 0.

EXERCICE 4 — 5 points

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$, on considère les points

$$\mathrm{A}(-1\,;\,-3\,;\,2),\qquad \mathrm{B}(3\,;\,-2\,;\,6)\quad\text{et}\quad \mathrm{C}(1\,;\,2\,;\,-4).$$

1. Démontrer que les points A, B et C définissent un plan que l'on notera $\mathscr{P}$.

2. **a.** Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}13\\-16\\-9\end{pmatrix}$ est normal au plan $\mathscr{P}$.

b. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan P est $13x-16y-9z-17=0$.

On note $\mathscr{D}$ la droite passant par le point F(15 ; −16 ; −8) et orthogonale au plan $\mathscr{P}$.

3. Donner une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$.

4. On appelle E le point d'intersection de la droite $\mathscr{D}$ et du plan $\mathscr{P}$.
Démontrer que le point E a pour coordonnées (2 ; 0 ; 1).

5. Déterminer la valeur exacte de la distance du point F au plan $\mathscr{P}$.

6. Déterminer les coordonnées du ou des point(s) de la droite $\mathscr{D}$ dont la distance au plan $\mathscr{P}$ est égale à la moitié de la distance du point F au plan $\mathscr{P}$.

∽ Baccalauréat Centres étrangers [6] 22 mars 2023 ∾

Sujet 2

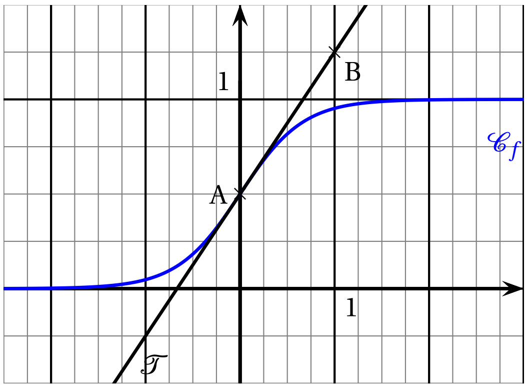
ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **5 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-3x}}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.
On nomme A le point de coordonnées $\left(0\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$ et B le point de coordonnées $\left(1\,;\,\dfrac{5}{4}\right)$.
On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{T}$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.



Partie A : lectures graphiques

Dans cette partie, les résultats seront obtenus par lecture graphique. Aucune justification n'est demandée.

1. Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathscr{T}$.
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.

Partie B : étude de la fonction

1. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Déterminer l'expression de sa fonction dérivée f'.
2. Justifier que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. **a.** Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f.
   b. Déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction f.
4. Déterminer la valeur exacte de la solution α de l'équation $f(x) = 0,99$.

Partie C : Tangente et convexité

6. Europe

1. Déterminer par le calcul une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
On note f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f.
On admet que f'' est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f''(x) = \frac{9\mathrm{e}^{-3x}\left(\mathrm{e}^{-3x}-1\right)}{\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)^3}.$$

2. Étudier le signe de la fonction f'' sur $\mathbb{R}$.

3. **a.** Indiquer, en justifiant, sur quel(s) intervalle(s) la fonction f est convexe.
b. Que représente le point A pour la courbe $\mathcal{C}_f$?
c. En déduire la position relative de la tangente $\mathcal{T}$ et de la courbe $\mathcal{C}_f$.
Justifier la réponse.

EXERCICE 2 **5 points**

Partie A

$$f(x) = x - \ln(1+x).$$

1. Justifier que la fonction f est définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $]-1\,;\,+\infty[$.
Déterminer l'expression de sa fonction dérivée f'.

3. **a.** En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$.
b. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $]-1\,;\,0[$.

4. **a.** Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$, on a :

$$f(x) = \ln\left(\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\right).$$

b. En déduire la limite en $+\infty$ de la fonction f.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = u_n - \ln(1+u_n).$$

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

1. Donner la valeur arrondie au millième de u_1.

2. En utilisant la question 3. a. de la partie A, démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant 0$.

3. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

4. Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) converge.

5. Déterminer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 3 **5 points**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.
On considère les points

$$A(3\,;0\,;1),\qquad B(2\,;1\,;2)\quad\text{et}\quad C(-2\,;\,-5\,;\,1).$$

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.

3. Vérifier que le plan (ABC) a pour équation cartésienne :

$$-x+y-2z+5=0.$$

4. On considère le point S(1 ; −2 ; 4).
Déterminer la représentation paramétrique de la droite (Δ), passant par S et orthogonale au plan (ABC).

5. On appelle H le point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC).
Montrer que les coordonnées de H sont (0 ; −1 ; 2).

6. Calculer la valeur exacte de la distance SH.

7. On considère le cercle $\mathscr{C}$, inclus dans le plan (ABC), de centre H, passant par le point B. On appelle $\mathscr{D}$ le disque délimité par le cercle $\mathscr{C}$.
Déterminer la valeur exacte de l'aire du disque $\mathscr{D}$.

8. En déduire la valeur exacte du volume du cône de sommet S et de base le disque $\mathscr{D}$.

EXERCICE 4 — 5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Les cinq questions sont indépendantes.

Une chaîne de fabrication produit des pièces mécaniques. On estime que 4 % des pièces produites par cette chaîne sont défectueuses.
On choisit au hasard n pièces produites par la chaîne de fabrication.
Le nombre de pièces produites est suffisamment grand pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses tirées.
Dans les trois questions suivantes, on prend $n = 50$.

1. Quelle est la probabilité, arrondie au millième, de tirer au moins une pièce défectueuse ?

a. 1 **b.** 0,870 **c.** 0,600 **d.** 0,599

2. La probabilité $p(3 < X \leqslant 7)$ est égale à :

a. $p(X \leqslant 7) - p(X > 3)$ **b.** $p(X \leqslant 7) - p(X \leqslant 3)$
c. $p(X < 7) - p(X > 3)$ **d.** $p(X < 7) - p(X \geqslant 3)$

3. Quel est le plus petit entier naturel k tel que la probabilité de tirer au plus k pièces défectueuses soit supérieure ou égale à 95 % ?

a. 2 **b.** 3 **c.** 4 **d.** 5

Dans les questions suivantes, n ne vaut plus nécessairement 50.

4. Quelle est la probabilité de ne tirer que des pièces défectueuses ?

   a. $0,04^n$ **b.** $0,96^n$ **c.** $1-0,04^n$ **d.** $1-0,96^n$

5. On considère la fonction Python ci-dessous. Que renvoie-t-elle ?

```
def seuil (x) :
    n=1
    while 1-0.96**n < x :
        n = n + 1
    return n
```

a. Le plus petit nombre n tel que la probabilité de tirer au moins une pièce défectueuse soit supérieure ou égale à x.

b. Le plus petit nombre n tel que la probabilité de ne tirer aucune pièce défectueuse soit supérieure ou égale à x.

c. Le plus grand nombre n tel que la probabilité de ne tirer que des pièces défectueuses soit supérieure ou égale à x.

d. Le plus grand nombre n tel que la probabilité de ne tirer aucune pièce défectueuse soit supérieure ou égale à x.

∾ Baccalauréat Asie 23 mars 2023 ∾

Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **5 points**

Partie A

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 400$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 60.$$

1. **a.** Calculer u_1 et u_2.
   b. Conjecturer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
2. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a l'inégalité

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 600.$$

3. **a.** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
   b. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Justifier.
4. On donne une fonction écrite en langage Python :

```
def mystere(seuil) :
    n=0
    u=400
    while u <= seuil :
        n = n+1
        u = 0.9*u+60
    return n
```

Quelle valeur obtient-on en tapant dans la console de Python : mystere (500) ?

Partie B

Un arboriculteur possède un verger dans lequel il a la place de cultiver au maximum 500 arbres.
Chaque année il vend 10 % des arbres de son verger et puis il replante 60 nouveaux arbres.
Le verger compte 400 arbres en 2023.
L'arboriculteur pense qu'il pourra continuer à vendre et à planter les arbres au même rythme pendant les années à venir.
Va-t-il être confronté à un problème de place dans son verger ? Expliquer votre réponse.

EXERCICE 2 **5 points**

On considère le cube ABCDEFGH qui est représenté en ANNEXE.
Dans le repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}}\,;\,\overrightarrow{\text{AD}}\,;\,\overrightarrow{\text{AE}}\right)$, on considère les points M, N et P de coordonnées :

$$\text{M}\left(1\,;\,1\,;\,\frac{3}{4}\right),\qquad \text{N}\left(0\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\right),\qquad \text{P}\left(1\,;\,0\,;\,-\frac{5}{4}\right)$$

Dans cet exercice, on se propose de calculer le volume du tétraèdre FMNP.

1. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\text{MN}}$ et $\overrightarrow{\text{MP}}$.
2. Placer les points M, N et P sur la figure donnée en ANNEXE qui sera à rendre avec la copie.
3. Justifier que les points M, N et P ne sont pas alignés.
   Dès lors les trois points définissent le plan (MNP).
4. **a.** Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\text{MN}} \cdot \overrightarrow{\text{MP}}$, puis en déduire la nature du triangle MNP.
   b. Calculer l'aire du triangle MNP.
5. **a.** Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\,(5\,;\,-8\,;\,4)$ est un vecteur normal au plan (MNP).
   b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (MNP) est $5x - 8y + 4z = 0$.
6. On rappelle que le point F a pour coordonnées F$(1\,;\,0\,;\,1)$.
   Déterminer une représentation paramétrique de la droite d orthogonale au plan (MNP) et passant par le point F.
7. On note L le projeté orthogonal du point F sur le plan (MNP).
   Montrer que les coordonnées du point L sont : $\text{L}\left(\frac{4}{7}\,;\,\frac{24}{35}\,;\,\frac{23}{35}\right)$.
8. Montrer que $\text{FL} = \dfrac{3\sqrt{105}}{35}$ puis calculer le volume du tétraèdre FMNP.
   On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{aire d'une base} \times \text{hauteur associée à cette base.}$$

EXERCICE 3 **5 points**

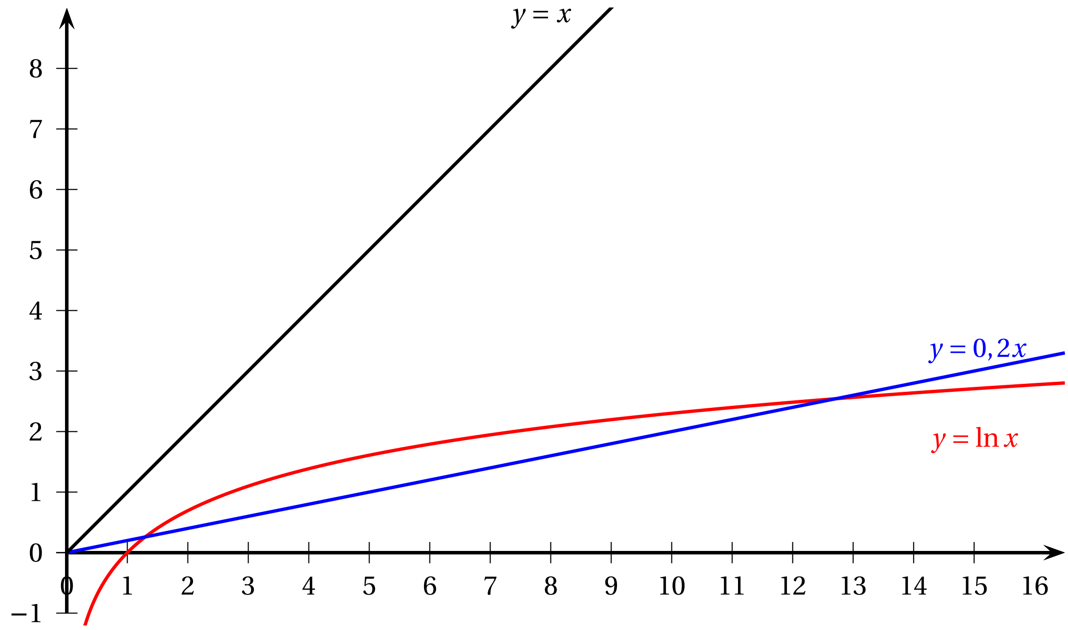
Soit k un réel strictement positif.
Le but de cet exercice est de déterminer le nombre de solutions de l'équation

$$\ln(x) = kx$$

de paramètre k.

1. **Conjectures graphiques :**

   On a représenté, ci-dessous, dans un repère orthogonal, la courbe d'équation $y = \ln(x)$, la droite d'équation $y = x$ ainsi que la droite d'équation $y = 0,2x$:



À partir du graphique ci-dessus, conjecturer le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = kx$ pour $k = 1$ puis pour $k = 0,2$.

2. Étude du cas $k = 1$:

On considère la fonction f, définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, par :

$$f(x) = \ln(x) - x.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

a. Calculer $f'(x)$.

b. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$.

Dresser le tableau des variations de la fonction f en y faisant figurer la valeur exacte des extremums s'il y en a.

Les limites aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.

c. En déduire le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = x$.

3. Étude du cas général :

k est un nombre réel strictement positif.

On considère la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(x) - kx.$$

On admet que le tableau des variations de la fonction g est le suivant :

x	0		$\frac{1}{k}$		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$g\left(\frac{1}{k}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

a. Donner, en fonction du signe de $g\left(\dfrac{1}{k}\right)$ le nombre de solutions de l'équation $g(x) = 0$.

b. Calculer $g\left(\dfrac{1}{k}\right)$ en fonction du réel k.

c. Montrer que $g\left(\dfrac{1}{k}\right) > 0$ équivaut à $\ln(k) < -1$.

d. Déterminer l'ensemble des valeurs de k pour lesquelles l'équation $\ln(x) = kx$ possède exactement deux solutions.

e. Donner, selon les valeurs de k, le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = kx$.

EXERCICE 4 **5 points**

Pour chacune des cinq questions de cet exercice, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

Une urne contient 15 billes indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 15.
La bille numérotée 1 est rouge.
Les billes numérotées 2 à 5 sont bleues.
Les autres billes sont vertes.

On choisit une bille au hasard dans l'urne.
On note R (respectivement B et V) l'évènement : « La bille tirée est rouge » (respectivement bleue et verte).

Question 1 :

Quelle est la probabilité que la bille tirée soit bleue ou numérotée d'un nombre pair ?

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\dfrac{7}{15}$	$\dfrac{9}{15}$	$\dfrac{11}{10}$	Aucune des affirmations précédentes n'est juste.

Question 2 :

Sachant que la bille tirée est verte, quelle est la probabilité qu'elle soit numérotée 7 ?

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\dfrac{1}{15}$	$\dfrac{7}{15}$	$\dfrac{1}{10}$	Aucune des affirmations précédentes n'est juste.

Un jeu est mis en place. Pour pouvoir jouer, le joueur paie la somme de 10 euros appelée la mise.
Ce jeu consiste à tirer une bille au hasard dans l'urne.

- Si la bille tirée est bleue, le joueur remporte, en euro, trois fois le numéro de la bille.
- Si la bille tirée est verte, le joueur remporte, en euro, le numéro de la bille.
- Si la bille tirée est rouge, le joueur ne remporte rien.

On note G la variable aléatoire qui donne le gain algébrique du joueur, c'est-à-dire la différence entre ce qu'il remporte et sa mise de départ.
Par exemple, si le joueur tire la bille bleue numérotée 3, alors son gain algébrique est -1 euro.

Question 3 :

Que vaut $\text{P}(\text{G} = 5)$?

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\dfrac{1}{15}$	$\dfrac{2}{15}$	$\dfrac{1}{3}$	Aucune des affirmations précédentes n'est juste.

Question 4 :

Quelle est la valeur de $P_R(G = 0)$?

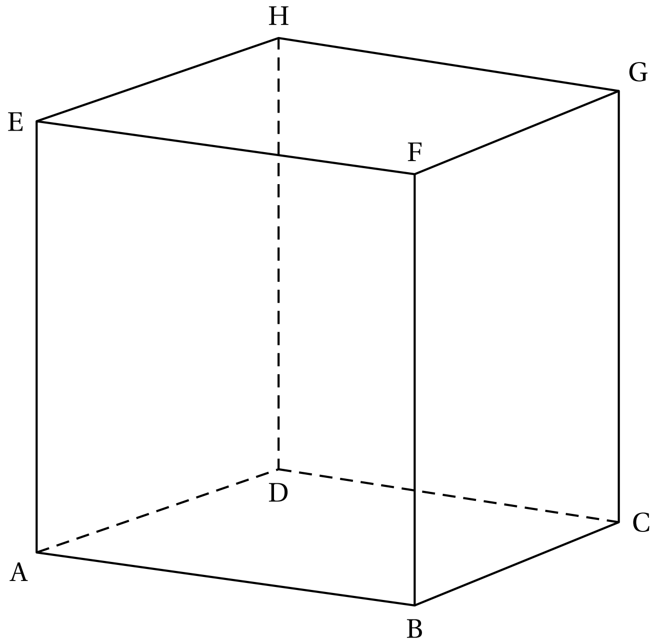
Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
0	$\dfrac{1}{15}$	1	Aucune des affirmations précédentes n'est juste.

Question 5 :

Que vaut $P_{(G=-4)}(V)$?

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\dfrac{1}{15}$	$\dfrac{4}{15}$	$\dfrac{1}{2}$	Aucune des affirmations précédentes n'est juste.

ANNEXE à rendre avec la copie



Baccalauréat Asie 24 mars 2023

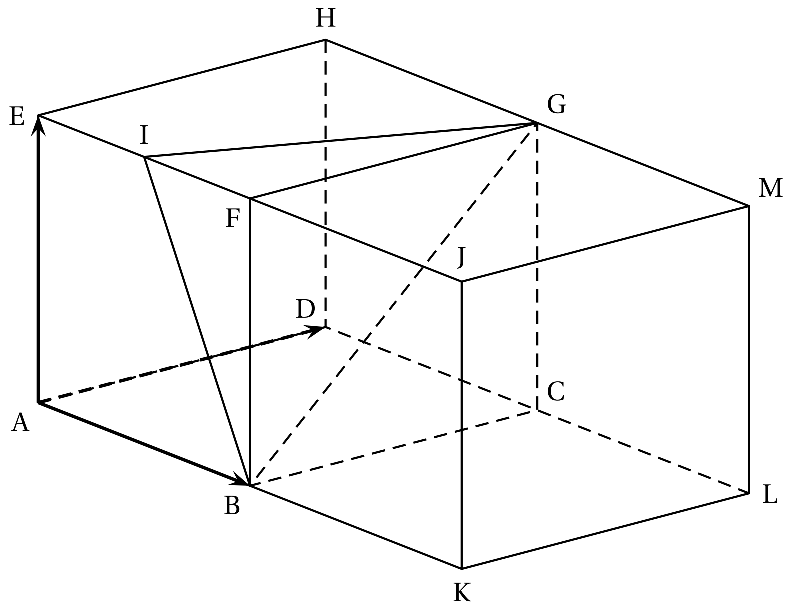
Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **5 points**

Partie A

On considère deux cubes ABCDEFGH et BKLCFJMG positionnés comme sur la figure suivante :



Le point I est le milieu de [EF].

Dans toute la suite de l'exercice, on se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$.

Ainsi, par exemple, les points F, G et J ont pour coordonnées

$$F(1\,;\,0\,;\,1), \qquad G(1\,;\,1\,;\,1) \quad \text{et} \quad J(2\,;\,0\,;\,1).$$

1. Montrer que le volume du tétraèdre FIGB est égal à $\dfrac{1}{12}$ d'unité de volume.
   On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :
   $$V = \frac{1}{3} \times \text{aire d'une base} \times \text{hauteur correspondante.}$$
2. Déterminer les coordonnées du point I.
3. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{DJ}$ un vecteur normal au plan (BIG).
4. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (BIG) est $2x - y + z - 2 = 0$.
5. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d, orthogonale à (BIG) et passant par F.
6. **a.** La droite d coupe le plan (BIG) au point L.
   Montrer que les coordonnées du point L sont $\left(\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{1}{6}\,;\,\dfrac{5}{6}\right)$.

   b. Calculer la longueur FL.

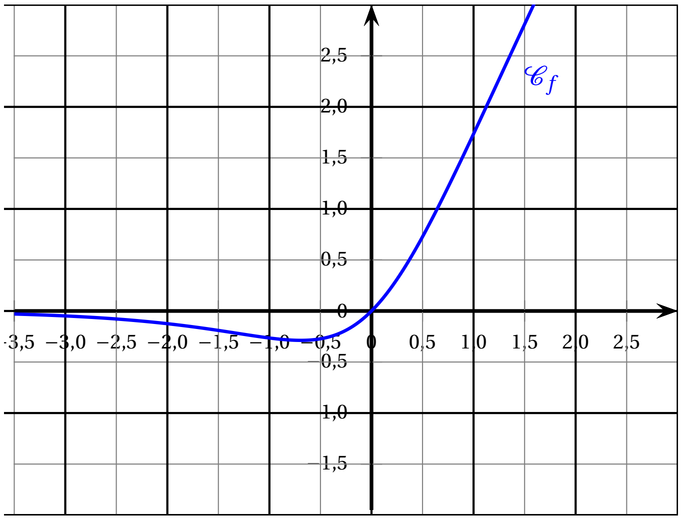
c. Déduire des questions précédentes l'aire du triangle IGB.

EXERCICE 2 **6 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} + 1\right).$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative représentée ci-dessous.



Un élève formule les conjectures suivantes à partir de cette représentation graphique :

1. L'équation $f(x) = 2$ semble admettre au moins une solution. **2.** Le plus grand intervalle sur lequel la fonction f semble être croissante est $[-0,5\ ;\ +\infty[$. **3.** L'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 0$ semble être : $y = 1,5x$.

Le but de cet exercice est de valider ou rejeter les conjectures concernant la fonction f.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction g définie par

$$g(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} + 1.$$

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} g(x)$.
2. Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.
3. Montrer que $g'(x) = \mathrm{e}^{x}\left(2\mathrm{e}^{x} - 1\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. Étudier le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
   Dresser le tableau des variations de la fonction g en y faisant figurer la valeur exacte des extremums s'il y en a, ainsi que les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
5. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.
6. Sans en mener nécessairement les calculs, expliquer comment on pourrait établir le résultat de la question 5 en posant $X = \mathrm{e}^{x}$.

Partie B

1. Justifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction dérivée de la fonction f est notée f'.
   Justifier que $f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
4. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[-\ln(2)\ ;\ +\infty[$.
5. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur $[-\ln(2)\ ;\ +\infty[$ et déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Partie C

À l'aide des résultats de la partie B, indiquer, pour chaque conjecture de l'élève, si elle est vraie ou fausse. Justifier.

EXERCICE 3 **4 points**

*Marie Sklodowska-Curie (*1867 – 1934*) est une physicienne (mais aussi chimiste et mathématicienne), polonaise naturalisée française.*
Deux Prix Nobel lui ont été décernés : un en Physique (partagé avec son mari et Henri Becquerel) en 1903 *et un en Chimie en* 1911 *pour la découverte de deux nouveaux éléments, le polonium (nom donné en hommage à ses origines) et le radium.*

On décide d'étudier le rayonnement radioactif du polonium lors de la désintégration des noyaux atomiques au cours du temps.
Au début de l'expérience, on dispose d'un morceau de 2 g de polonium.
On sait que 1 g de polonium contient 3×10^{21} noyaux atomiques.
On admet que, au bout de 24 heures, 0,5 % des noyaux se sont désintégrés et que, pour compenser cette disparition, on ajoute alors 0,005 g de polonium.
On modélise la situation à l'aide d'une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$; on note v_0 le nombre de noyaux contenus dans le polonium au début de l'expérience.
Pour $n \geqslant 1$, v_n désigne le nombre de noyaux contenus dans le polonium au bout de n jours écoulés.

1. **a.** Vérifier que $v_0 = 6 \times 10^{21}$.
   b. Expliquer que, pour tout nombre entier naturel n, on a
   $$v_{n+1} = 0,995 v_n + 1,5 \times 10^{19}.$$
2. **a.** Démontrer, par récurrence sur n, que $0 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$.
   b. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel n, par :
   $$u_n = v_n - 3 \times 10^{21}.$$
   a. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 0,995.
   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $v_n = 3 \times 10^{21}\left(0,995^n + 1\right)$.
   c. En déduire la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Déterminer, par le calcul, au bout de combien de jours le nombre de noyaux de polonium sera inférieur à $4,5 \times 10^{21}$. Justifier la réponse.
5. On souhaite disposer de la liste des termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Pour cela, on utilise une fonction appelée noyaux programmée en langage Python et retranscrite partiellement ci-après.

```
1 def noyaux (n) :
2     V =6*10**21
3     L=[V]
4     for k in range (n) :
5         V= ...
6         L.append(V)
7     return L
```

a. À la lecture des questions précédentes, proposer deux solutions différentes pour compléter la ligne 5 de la fonction noyaux afin qu'elle réponde au problème.

b. Pour quelle valeur de l'entier n la commande noyaux(n) renverra-t-elle les relevés quotidiens du nombre de noyaux contenus dans l'échantillon de polonium pendant 52 semaines d'étude ?

EXERCICE 4 **5 points**

Pour chacune des cinq questions de cet exercice, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

On considère L une liste de nombres constituée de termes consécutifs d'une suite arithmétique de premier terme 7 et de raison 3, le dernier nombre de la liste est 2 023 soit :

$$L = [7, 10, \ldots, 2\,023].$$

Question 1 : Le nombre de termes de cette liste est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
2 023	673	672	2 016

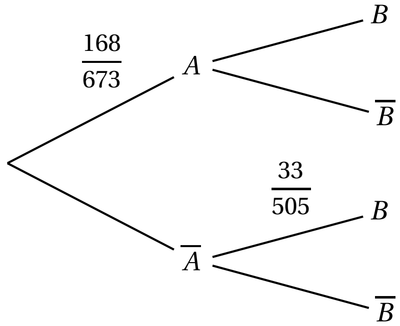
Question 2 : On choisit au hasard un nombre dans cette liste. La probabilité de tirer un nombre pair est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{34}{673}$	$\dfrac{336}{673}$	$\dfrac{337}{673}$

On rappelle qu'on choisit au hasard un nombre dans cette liste.
On s'intéresse aux évènements suivants :

- Évènement A : « obtenir un multiple de 4 »
- Évènement B : « obtenir un nombre dont le chiffre des unités est 6 »

Pour répondre aux questions suivantes on pourra utiliser l'arbre pondéré ci-dessous et on donne $p(A \cap B) = \dfrac{34}{673}$.



Question 3 :
La probabilité d'obtenir un multiple de 4 ayant 6 comme chiffre des unités est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\dfrac{168}{673} \times \dfrac{34}{673}$	$\dfrac{34}{673}$	$\dfrac{17}{84}$	$\dfrac{168}{34}$

Question 4 : $P_B(A)$ est égale à :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\dfrac{36}{168}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{33}{168}$	$\dfrac{34}{67}$

Question 5 : On choisit, au hasard, successivement, 10 éléments de cette liste.
Un élément peut être choisi plusieurs fois. La probabilité qu'aucun de ces 10 nombres ne soit un multiple de 4 est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\left(\dfrac{505}{673}\right)^{10}$	$1-\left(\dfrac{505}{673}\right)^{10}$	$\left(\dfrac{168}{673}\right)^{10}$	$1-\left(\dfrac{168}{673}\right)^{10}$

∽ Baccalauréat Amérique du Nord 27 mars 2023 ∾

Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **5 points**

Dans un souci d'améliorer sa politique en matière de développement durable, une entreprise a réalisé une enquête statistique sur sa production de déchets.
Dans cette enquête, les déchets sont classés en trois catégories :

— 69 % des déchets sont minéraux et non dangereux ;

— 28 % des déchets sont non minéraux et non dangereux ;

— les déchets restants sont des déchets dangereux.

Cette enquête statistique nous apprend également que :

— 73 % des déchets minéraux et non dangereux sont recyclables ;

— 49 % des déchets non minéraux et non dangereux sont recyclables ;

— 35 % des déchets dangereux sont recyclables.

Les parties A *et* B *sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.*

Partie A

Dans cette entreprise, on prélève au hasard un déchet. On considère les évènements suivants :

— M : « Le déchet prélevé est minéral et non dangereux » ;

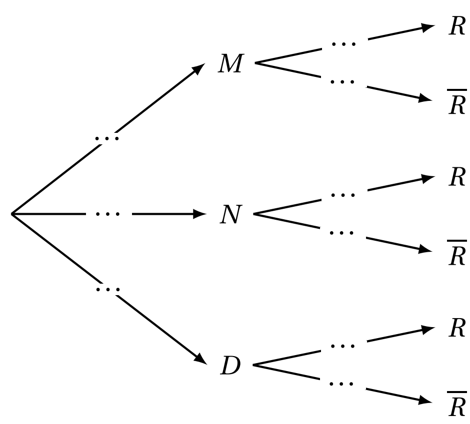
— N : « Le déchet prélevé est non minéral et non dangereux » ;

— D : « Le déchet prélevé est dangereux » ;

— R : « Le déchet prélevé est recyclable ».

On note $\overline{R}$ l'évènement contraire de l'évènement R.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation de l'énoncé.



2. Justifier que la probabilité que le déchet soit dangereux et recyclable est égale à 0,010 5.

3. Déterminer la probabilité $P\left(M \cap \overline{R}\right)$ et interpréter la réponse obtenue dans le contexte de l'exercice.

4. Démontrer que la probabilité de l'évènement R est $P(R) = 0,651\,4$.

5. On suppose que le déchet prélevé est recyclable. Déterminer la probabilité que ce déchet soit non minéral et non dangereux. *On donnera la valeur arrondie au dix-millième.*

Partie B

On rappelle que la probabilité qu'un déchet prélevé au hasard soit recyclable est égale à 0,651 4.

1. Afin de contrôler la qualité de la collecte dans l'entreprise, on prélève un échantillon de 20 déchets pris au hasard dans la production. On suppose que le stock est suffisamment important pour assimiler le prélèvement de cet échantillon à un tirage avec remise.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de déchets recyclables dans cet échantillon.

a. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

b. Donner la probabilité que l'échantillon contienne exactement 14 déchets recyclables. *On donnera la valeur arrondie au dix-millième.*

2. Dans cette question, on prélève désormais n déchets, où n désigne un entier naturel strictement positif.

a. Donner l'expression en fonction de n de la probabilité p_n qu'aucun déchet de cet échantillon ne soit recyclable.

b. Déterminer la valeur de l'entier naturel n à partir de laquelle la probabilité qu'au moins un déchet du prélèvement soit recyclable est supérieure ou égale à 0,999 9.

EXERCICE 2 **5 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{3x} - (2x+1)\mathrm{e}^{x}$$

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Partie A - Étude d'une fonction auxiliaire

On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 3\mathrm{e}^{2x} - 2x - 3$$

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction g en $-\infty$.

b. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.

2. **a.** On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note g' sa fonction dérivée. Démontrer que pour tout nombre réel x, on a $g'(x) = 6\mathrm{e}^{2x} - 2$.

b. Étudier le signe de la fonction dérivée g' sur $\mathbb{R}$.

c. En déduire le tableau de variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. Vérifier que la fonction g admet un minimum égal à $\ln(3) - 2$.

3. **a.** Montrer que $x = 0$ est solution de l'équation $g(x) = 0$.

b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une deuxième solution, non nulle, notée α, dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-1}.

4. Déduire des questions précédentes le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

Partie B - Étude de la fonction f

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' sa fonction dérivée.
Démontrer que pour tout nombre réel x, on a $f'(x) = \mathrm{e}^x g(x)$, où g est la fonction définie dans la **partie A**.

2. En déduire alors le signe de la fonction dérivée f' puis les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3. Pourquoi la fonction f n'est-elle pas convexe sur $\mathbb{R}$? Expliquer.

EXERCICE 3 **5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Les cinq questions sont indépendantes.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k}\right)$.
On considère les points A$(-1\,;\,2\,;\,5)$, B$(3\,;\,6\,;\,3)$, C$(3\,;\,0\,;\,9)$ et D$(8\,;\,-3\,;\,-8)$.
On admet que les points A, B et C ne sont pas alignés.

1. ABC est un triangle :

a. isocèle rectangle en A **b.** isocèle rectangle en B
c. isocèle rectangle en C **d.** équilatéral

2. Une équation cartésienne du plan (BCD) est :

a. $2x + y + z - 15 = 0$ **b.** $9x - 5y + 3 = 0$
c. $4x + y + z - 21 = 0$ **d.** $11x + 5z - 73 = 0$

3. On admet que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $x - 2y - 2z + 15 = 0$.
On appelle H le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).
On peut affirmer que :

a. H$(-2\,;\,17\,;\,12)$ **b.** H$(3\,;\,7\,;\,2)$
c. H$(3\,;\,2\,;\,7)$ **d.** H$(-15\,;\,1\,;\,-1)$

4. Soit la droite Δ de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = 5 + t \\ y = 3 - t \\ z = -1 + 3t \end{array}\right.$, avec t réel.

Les droites (BC) et Δ sont :

a. confondues **b.** strictement parallèles
c. sécantes **d.** non coplanaires

5. On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $2x - y + 2z - 6 = 0$.
On admet que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $x - 2y - 2z + 15 = 0$.
On peut affirmer que :

a. les plans $\mathscr{P}$ et (ABC) sont strictement parallèles
b. les plans $\mathscr{P}$ et (ABC) sont sécants et leur intersection est la droite (AB)
c. les plans $\mathscr{P}$ et (ABC) sont sécants et leur intersection est la droite (AC)
d. les plans $\mathscr{P}$ et (ABC) sont sécants et leur intersection est la droite (BC)

EXERCICE 4 **5 points**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{11}{u_n}\right)$$

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

Partie A - Étude de la suite (u_n)

1. Donner u_1 et u_2 sous forme de fractions irréductibles.
2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{11}{x}\right)$$

Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[\sqrt{11}\,;\,+\infty\right[$.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \sqrt{11}$.
4. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite réelle. On note a cette limite.
5. Après avoir déterminé et résolu une équation dont a est solution, préciser la valeur exacte de a.

Partie B - Application géométrique

Pour tout entier naturel n, on considère un rectangle R_n d'aire 11 dont la largeur est notée ℓ_n et longueur L_n

La suite (L_n) est définie par $L_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n,

$$L_{n+1} = \frac{L_n + \ell_n}{2}$$

1. **a.** Expliquer pourquoi $\ell_0 = 2,2$.

   b. Établir que pour tout entier naturel n,

$$\ell_n = \frac{11}{L_n}.$$

2. Vérifier que la suite (L_n) correspond à la suite (u_n) de la **partie A**.
3. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $\ell_n \leqslant \sqrt{11} \leqslant L_n$.
4. On admet que les suites (L_n) et (ℓ_n) convergent toutes les deux vers $\sqrt{11}$. Interpréter géométriquement ce résultat dans le contexte de la **partie B**.
5. Voici un script, écrit en langage Python, relatif aux suites étudiées dans cette partie :

```
def heron(n):
  L=5
  ℓ=2.2
  for i in range(n):
    L = (L+ℓ) / 2
    ℓ = 11 / L
  return round(ℓ,6), round(L,6)
```

On rappelle que la fonction Python `round(x,k)` renvoie une version arrondie du nombre `x` avec `k` décimales.

   a. Si l'utilisateur tape `heron(3)` dans une console d'exécution Python, qu'obtient-il comme valeurs de sortie pour ℓ et L?

   b. Donner une interprétation de ces deux valeurs.

Baccalauréat LA RÉUNION 28 mars 2023

Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **5 points**

Une entreprise appelle des personnes par téléphone pour leur vendre un produit.

— L'entreprise appelle chaque personne une première fois :
- la probabilité que la personne ne décroche pas est égale à 0,6;
- si la personne décroche, la probabilité qu'elle achète le produit est égale à 0,3.

— Si la personne n'a pas décroché au premier appel, on procède à un second appel :
- la probabilité que la personne ne décroche pas est égale à $0,3$;
- si la personne décroche, la probabilité qu'elle achète le produit est égale à 0,2.

— Si une personne ne décroche pas au second appel, on cesse de la contacter.

On choisit une personne au hasard et on considère les évènements suivants :

D_1 : « la personne décroche au premier appel »;

D_2 : « la personne décroche au deuxième appel »;

A : « la personne achète le produit ».

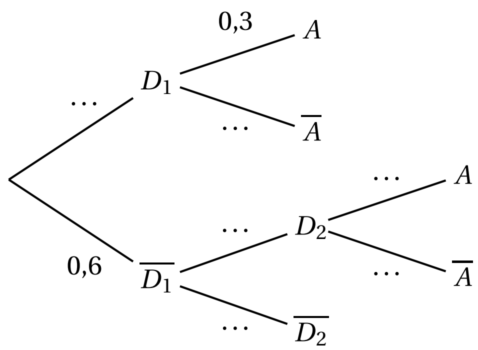
Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante

Partie A

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre.

2. En utilisant l'arbre pondéré, montrer que la probabilité de l'évènement A est $P(A) = 0,204$.

3. On sait que la personne a acheté le produit.
Quelle est la probabilité qu'elle ait décroché au premier appel ?



Partie B

On rappelle que, pour une personne donnée, la probabilité qu'elle achète le produit est égale à $0,204$.

1. On considère un échantillon aléatoire de 30 personnes.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes de l'échantillon qui achètent le produit.

a. On admet que X suit une loi binomiale. Donner, sans justifier, ses paramètres.

b. Déterminer la probabilité qu'exactement 6 personnes de l'échantillon achètent le produit. Arrondir le résultat au millième.

c. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X.

Interpréter le résultat.

2. Soit n un entier naturel non nul.
On considère désormais un échantillon de n personnes.
Déterminer la plus petite valeur de n telle que la probabilité qu'au moins l'une des personnes de l'échantillon achète le produit soit supérieure ou égale à $0,99$.

EXERCICE 2 **5 points**

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$\boldsymbol{f(x) = 3x + 1 - 2x\ln(x)}.$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.
On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

2. **a.** Démontrer que pour tout réel x strictement positif : $f'(x) = 1 - 2\ln(x)$.

b. Étudier le signe de f' et dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

On fera figurer dans ce tableau les limites ainsi que la valeur exacte de l'extremum.

3. **a.** Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0\,;\,+\infty[$. On notera α cette solution.

b. En déduire le signe de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$.

4. On considère une primitive quelconque de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. On la note F.
Peut-on affirmer que la fonction F est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\,;\,+\infty\right[$? Justifier.

5. **a.** Étudier la convexité de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$.
Quelle est la position de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à ses tangentes ?

b. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

c. Déduire des questions 5. a et 5 .b que pour tout réel x strictement positif :

$$\ln(x) \geqslant 1 - \frac{1}{x}.$$

.

EXERCICE 3 **5 points**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}n + 1.$$

Partie A

Cette partie est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une absence de réponse, ou une réponse multiple, ne rapporte ni n'enlève de point.

1. La valeur de u_2 est égale à :

a. $\dfrac{11}{4}$ **b.** $\dfrac{13}{2}$

c. 3,5 **b.** 2,7

2. La suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n$ est :

a. arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$ **b.** géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$

c. constante. **d.** ni arithmétique, ni géométrique.

3. On considère la fonction ci-dessous, écrite de manière incomplète en langage Python.

n désigne un entier naturel non nul.
On rappelle qu'en langage Python « i in range (n) » signifie que i varie de 0 à $n - 1$.

```
1  def terme (n)
2      U=3
3      for i in range(n) :
4  ......................
5      return U
```

Pour que terme (n) renvoie la valeur de u_n, on peut compléter la ligne 4 par :

a. U = U/2 + (i+1)/2+1 **b.** U = U/2 + n/2 + 1

c. U = U/2 + (i−1)/2+1 **d.** U = U/2 + i/2 + 1

Partie B

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

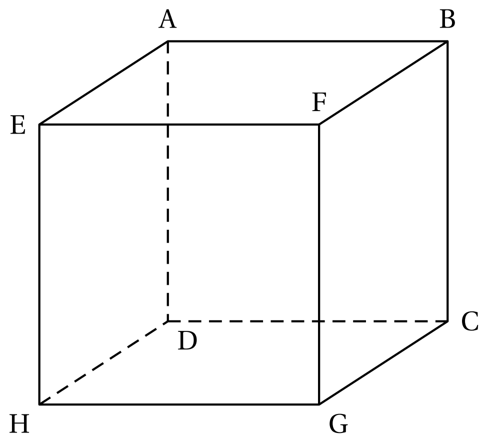
$$n \leqslant u_n \leqslant n + 3.$$

2. En déduire la limite de la suite (u_n).

3. Déterminer la limite de la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)$.

EXERCICE 4 **5 points**

On considère le cube ABCDEFGH ci-dessous tel que AB = 1.
On note M le centre de la face BCGF et N le centre de la face EFGH.



On se place dans le repère orthonormé $\left(\text{D}~;~\overrightarrow{\text{DH}},~\overrightarrow{\text{DC}},~\overrightarrow{\text{DA}}\right)$.

1. Donner sans justifier les coordonnées des points F et C.
2. Calculer les coordonnées des points M et N.
3. **a.** Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{\text{AG}}$ est normal au plan (HFC).

   b. En déduire une équation cartésienne du plan (HFC).
4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AG).
5. Démontrer que le point R de coordonnées $\left(\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{2}{3};\,\dfrac{1}{3}\right)$ est le projeté orthogonal du point G sur le plan (HFC).
6. On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (FG) est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1\\ y &=& 1 \quad (t \in \mathbb{R}).\\ z &=& t\end{array}\right.$$

   Démontrer qu'il existe un unique point K sur la droite (FG) tel que le triangle KMN soit rectangle en K.
7. Quelle fraction du volume du cube ABCDEFGH le volume du tétraèdre FNKM représente-t-il ?

∽ Baccalauréat Amérique du Nord 28 mars 2023 ∾

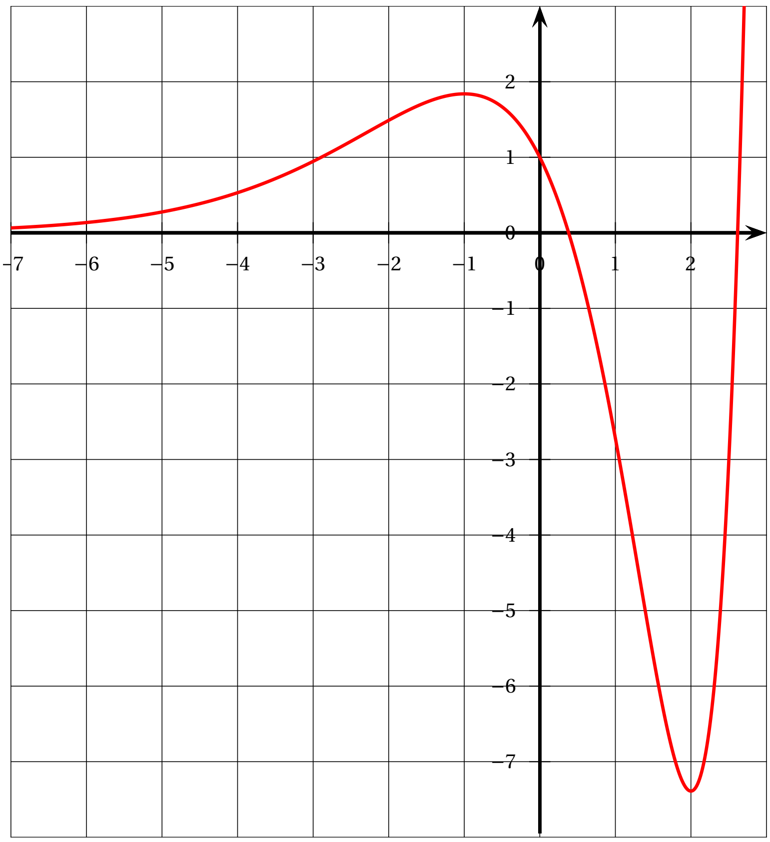
Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **5 points**

Partie A

Le plan est muni d'un repère orthogonal.
On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée.
On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée f'.



Dans cette partie, les résultats seront obtenus par lecture graphique de la courbe représentative de la fonction dérivée f'. Aucune justification n'est demandée.

1. Donner le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$. On utilisera des valeurs approchées si besoin.
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble être convexe.

Partie B

On admet que la fonction f de la partie **A** est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(x^2 - 5x + 6\right)\mathrm{e}^x.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère.

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

2. Montrer que, pour tout réel x, on a $f'(x) = \left(x^2 - 3x + 1\right)\mathrm{e}^x$.

3. En déduire le sens de variation de la fonction f.

4. Déterminer l'équation réduite de la tangente $(\mathcal{T})$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f. On admet que, pour tout réel x, on a $f''(x) = (x+1)(x-2)\mathrm{e}^x$.

5. a. Étudier la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[-1~;~2]$, on a $f(x) \leqslant x + 6$.

EXERCICE 2 **5 points**

On étudie un groupe de 3 000 sportifs qui pratiquent soit l'athlétisme dans le club A, soit le basketball dans le club B.
En 2023, le club A compte 1 700 membres et le club B en compte 1 300.

On décide de modéliser le nombre de membres du club A et du club B respectivement par deux suites (a_n) et (b_n), où n désigne le rang de l'année à partir de 2023.
L'année 2023 correspond au rang 0. On a alors $a_0 = 1\,700$ et $b_0 = 1\,300$.
Pour notre étude, on fait les hypothèses suivantes :

— durant l'étude, aucun sportif ne quitte le groupe ;

— chaque année, 15 % des sportifs du club A quittent ce club et adhèrent au club B ;

— chaque année, 10 % des sportifs du club B quittent ce club et adhèrent au club A.

1. Calculer les nombres de membres de chaque club en 2024.

2. Pour tout entier naturel n, déterminer une relation liant a_n et b_n.

3. Montrer que la suite (a_n) vérifie la relation suivante pour tout entier naturel n, on a :

$$a_{n+1} = 0,75a_n + 300.$$

4. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :

$$1200 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant 1\,700.$$

b. En déduire que la suite (a_n) converge.

5. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = a_n - 1\,200$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

b. Exprimer v_n en fonction de n.

c. En déduire que pour tout entier naturel n, $a_n = 500 \times 0,75^n + 1\,200$.

6. a. Déterminer la limite de la suite (a_n).

b. Interpréter le résultat de la question précédente dans le contexte de l'exercice.

7. a. Recopier et compléter le programme Python ci-dessous afin qu'il renvoie la plus petite valeur de n à partir de laquelle le nombre de membres du club A est strictement inférieur à 1 280.

```
def seuil() :
    n = 0
    A = 1 700
    while ... :
        n=n+1
        A = ...
    return...
```

b. Déterminer la valeur renvoyée lorsqu'on appelle la fonction seuil.

EXERCICE 3 **5 points**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé d'unité 1 cm, on considère les points

$$D(3\,;\,1\,;\,5),\qquad E(3\,;\,-2\,;\,-1),\qquad F(-1\,;\,2\,;\,1),\qquad G(3\,;\,2\,;\,-3).$$

1. **a.** Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FG}$.
   b. Justifier que les points E, F et G ne sont pas alignés.
2. **a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FG).
   b. On appelle H le point de coordonnées $(2\,;\,2\,;\,-2)$.
   Vérifier que H est le projeté orthogonal de E sur la droite (FG) .
   c. Montrer que l'aire du triangle EFG est égale à 12 cm^2.
3. **a.** Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (EFG).
   b. Déterminer une équation cartésienne du plan (EFG) .
   c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) passant par le point D et orthogonale au plan (EFG) .
   d. On note K le projeté orthogonal du point D sur le plan (EFG).
   À l'aide des questions précédentes, calculer les coordonnées du point K.
4. **a.** Vérifier que la distance DK est égale à 5 cm.
   b. En déduire le volume du tétraèdre DEFG.

EXERCICE 4 **5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Les cinq questions sont indépendantes.

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 0,05 - \frac{\ln x}{x-1}.$$

La limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à :

a. $+\infty$ **b.** 0,05 **c.** $-\infty$ **d.** 0

2. On considère une fonction h continue sur l'intervalle $[-2;4]$ telle que :

$$h(-1) = 0, \qquad h(1) = 4, \qquad h(3) = -1.$$

On peut affirmer que :

a. la fonction h est croissante sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$.
b. la fonction h est positive sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$.
c. il existe au moins un nombre réel a dans l'intervalle $[1\ ;\ 3]$ tel que $h(a) = 1$.
d. l'équation $h(x) = 1$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[-2\ ;\ 4]$.

3. On considère deux suites (u_n) et (v_n) à termes strictement positifs telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et (v_n) converge vers 0 .
On peut affirmer que :

a. la suite $\left(\frac{1}{v_n}\right)$ converge.
b. la suite $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)$ converge.
c. la suite (u_n) est croissante.
d. $\lim\limits_{n\to+\infty} (-u_n)^n = -\infty$

4. Pour participer à un jeu, un joueur doit payer 4 €.
Il lance ensuite un dé équilibré à six faces :

— s'il obtient 1, il remporte 12 € ;
— s'il obtient un nombre pair, il remporte 3€ ;
— sinon, il ne remporte rien.

En moyenne, le joueur :

a. gagne 3,50 €
b. perd 3 €.
c. perd 1,50 €
d. perd 0,50 €.

5. On considère la variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(3\ ;\ p)$.
On sait que $P(X = 0) = \dfrac{1}{125}$. On peut affirmer que :

a. $p = \dfrac{1}{5}$
b. $P(X = 1) = \dfrac{124}{125}$
c. $p = \dfrac{4}{5}$
d. $P(X = 1) = \dfrac{4}{5}$

Baccalauréat LA RÉUNION 29 mars 2023

Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **5 points**

Un commerçant vend deux types de matelas : matelas RESSORTS et matelas MOUSSE.
On suppose que chaque client achète un seul matelas.
On dispose des informations suivantes :

- 20 % des clients achètent un matelas RESSORTS.
  Parmi eux, 90 % sont satisfaits de leur achat.
- 82 % des clients sont satisfaits de leur achat.

Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante.

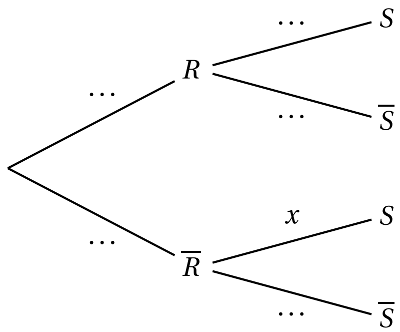
Partie A

On choisit au hasard un client et on note les évènements :

- R : « le client achète un matelas RESSORTS »,
- S : « le client est satisfait de son achat ».

On note $x = P_{\overline{R}}(S)$, où $P_{\overline{R}}(S)$ désigne la probabilité de S sachant que R n'est pas réalisé.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre décrivant la situation.
2. Démontrer que $x = 0,8$.
3. On choisit un client satisfait de son achat.
   Quelle est la probabilité qu'il ait acheté un matelas RESSORTS ?
   On arrondira le résultat à 10^{-2}.



Partie B

1. On choisit 5 clients au hasard.
   On considère la variable aléatoire X qui donne le nombre de clients satisfaits de leur achat parmi ces 5 clients.
   a. On admet que X suit une loi binomiale. Donner ses paramètres.
   b. Déterminer la probabilité qu'au plus trois clients soient satisfaits de leur achat.
   On arrondira le résultat à 10^{-3}.
2. Soit n un entier naturel non nul.
   On choisit à présent n clients au hasard. Ce choix peut être assimilé à un tirage au sort avec remise.
   a. On note p_n la probabilité que les n clients soient tous satisfaits de leur achat.
   Démontrer que $p_n = 0,82^n$.
   b. Déterminer les entiers naturels n tels que $p_n < 0,01$.
   Interpréter dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 2 **5 points**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{6u_n + 2}{u_n + 5}.$$

1. Calculer u_1.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{6x + 2}{x + 5}.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = f(u_n)$.

a. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
En déduire que pour tout réel $x > 2$, on a $f(x) > 2$.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n > 2$.

3. On admet que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(u_n + 1)}{u_n + 5}.$$

a. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel par :

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}.$$

a. Calculer v_0.

b. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{4}{7}$.

c. Déterminer, en justifiant, la limite de (v_n).
En déduire la limite de (u_n).

5. On considère la fonction Python seuil ci-contre, où A est un nombre réel strictement plus grand que 2.

Donner, sans justification, la valeur renvoyée par la commande seuil (2.001) puis interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

```
def seuil (A) :
    n = 0
    u = 8
    while u > A :
        u = (6*u + 2) / (u + 5)
        n = n + 1
    return n
```

EXERCICE 3 **5 points**

On se place dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$.

On considère le point A(1 ; 1 ; 0) et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$.

On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation : $x + 4y + 2z + 1 = 0$.

1. On note (d) la droite passant par A et dirigée par le vecteur $\vec{u}$.
Déterminer une représentation paramétrique de (d).

2. Justifier que la droite (d) et le plan $\mathscr{P}$ sont sécants en un point B dont les coordonnées sont (1 ; -1 ; 1).

3. On considère le point C$(1\ ;\ -1\ ;\ -1)$.

a. Vérifier que les points A, B et C définissent bien un plan.

b. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

c. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

4. **a.** Justifier que le triangle ABC est isocèle en A.

b. Soit H le milieu du segment [BC].
Calculer la longueur AH puis l'aire du triangle ABC.

5. Soit D le point de coordonnées $(0\ ;\ -1\ ;\ 1)$.

a. Montrer que la droite (BD) est une hauteur de la pyramide ABCD.

b. Déduire des questions précédentes le volume de la pyramide ABCD.

On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par :

$$V = \frac{1}{3}\mathcal{B} \times h,$$

où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur correspondante.

EXERCICE 4 **5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une absence de réponse, ou une réponse multiple, ne rapporte ni n'enlève de point.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x\,\mathrm{e}^{x}$.
Le nombre de solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = -\dfrac{73}{100}$ est égal à :

a. 0 **b.** 1 **c.** 2 **d.** une infinité.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{x+1}{\mathrm{e}^{x}}.$$

La limite de la fonction g en $-\infty$ est égale à :

a. $-\infty$ **b.** $+\infty$ **c.** 0 **d**elle n'existe pas.

3. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = (4x - 16)\,\mathrm{e}^{2x}.$$

On note $\mathcal{C}_h$ la courbe représentative de h dans un repère orthogonal.
On peut affirmer que :

a. h est convexe sur $\mathbb{R}$.

b. $\mathscr{C}_h$ possède un point d'inflexion en $x = 3$.

c. h est concave sur $\mathbb{R}$.

d. $\mathscr{C}_h$ possède un point d'inflexion en $x = 3,5$.

4. On considère la fonction k définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$k(x) = 3\ln(x) - x.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction k dans un repère orthonormé.
On note T la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $x = \mathrm{e}$.
Une équation de T est :

a. $y = (3-\mathrm{e})x$

b. $y = \left(\dfrac{3-\mathrm{e}}{\mathrm{e}}\right)x$

c. $y = \left(\dfrac{3}{\mathrm{e}} - 1\right)x + 1$

d. $y = (\mathrm{e}-1)x + 1$

5. On considère l'équation $[\ln(x)]^2 + 10\ln(x) + 21 = 0$, avec $x \in]0\,;\,+\infty[$.
Le nombre de solutions de cette équation est égal à :

a. 0 **b.** 1 **c.** 2 **d.** une infinité.

Baccalauréat Nouvelle-Calédonie 28 août 2023 Jour 1
ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé

Le sujet propose 4 exercices

EXERCICE 1 5 points

Une entreprise de location de bateaux de tourisme propose à ses clients deux types de bateaux : bateau à voile et bateau à moteur.
Par ailleurs, un client peut prendre l'option PILOTE. Dans ce cas, le bateau, qu'il soit à voile ou à moteur, est loué avec un pilote.
On sait que :

- 60 % des clients choisissent un bateau à voile ; parmi eux, 20 % prennent l'option PILOTE.
- 42 % des clients prennent l'option PILOTE.

On choisit au hasard un client et on considère les évènements :

- V : « le client choisit un bateau à voile » ;
- L : « le client prend l'option PILOTE ».

Les trois parties peuvent être traitées de manière indépendante

Partie A

1. Traduire la situation par un arbre pondéré que l'on complètera au fur et à mesure.
2. Calculer la probabilité que le client choisisse un bateau à voile et qu'il ne prenne pas l'option PILOTE.
3. Démontrer que la probabilité que le client choisisse un bateau à moteur et qu'il prenne l'option PILOTE est égale à $0,30$.
4. En déduire $P_{\overline{V}}(L)$, probabilité de L sachant que V n'est pas réalisé.
5. Un client a pris l'option PILOTE.
   Quelle est la probabilité qu'il ait choisi un bateau à voile ? Arrondir à $0,01$ près.

Partie B

Lorsqu'un client ne prend pas l'option PILOTE, la probabilité que son bateau subisse une avarie est égale à $0,12$. Cette probabilité n'est que de $0,005$ si le client prend l'option PILOTE.
On considère un client. On note A l'évènement : « son bateau subit une avarie ».

1. Déterminer $P(L \cap A)$ et $P\left(\overline{L} \cap A\right)$.
2. L'entreprise loue 1 000 bateaux.
   À combien d'avaries peut-elle s'attendre ?

Partie C

On rappelle que la probabilité qu'un client donné prenne l'option PILOTE est égale à 0,42.
On considère un échantillon aléatoire de 40 clients. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de clients de l'échantillon prenant l'option PILOTE.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Donner sans justification ses paramètres.
2. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3}, qu'au moins 15 clients prennent l'option PILOTE.

EXERCICE 2 5 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3.$$

1. **a.** Démontrer que $u_1 = 12$.
   b. Déterminer u_2 en détaillant le calcul.
   c. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation ainsi que la limite de la suite (u_n).
2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

   $$u_n \geqslant n + 1.$$

   b. En déduire la limite de la suite (u_n).
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

   $$v_n = u_n - n - 1.$$

   a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
   Donner sa raison et son premier terme v_0.
   b. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.
   c. En déduire que pour tout entier naturel n :

   $$u_n = 2 \times 5^n + n + 1.$$

   d. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
4. On considère la fonction ci-contre, écrite de manière incomplète en langage Python et destinée à renvoyer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 10^7$.
   a. Recopier le programme et compléter les deux instructions manquantes.
   b. Quelle est la valeur renvoyée par cette fonction ?

```
def suite() :
    u = 3
    n = 0
    while ... :
        u = ...
        n = n + 1
    return n
```

EXERCICE 3 5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une absence de réponse, ou une réponse multiple, ne rapporte ni n'enlève de point.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)\mathrm{e}^x$.
Une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ est définie par :

a. $F(x) = 1 + x\,\mathrm{e}^x$ **b.** $F(x) = (1+x)\,\mathrm{e}^x$
c. $F(x) = (2+x)\,\mathrm{e}^x$ **d.** $F(x) = \left(\dfrac{x^2}{2} + x\right)\mathrm{e}^x$.

Dans toute la suite de l'exercice, on se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$

2. On considère les droites (d_1) et (d_2) dont des représentations paramétriques sont respectivement :

$$(d_1)\left\{\begin{array}{l c l}x &=& 2+r\\y &=& 1+r\\z &=& -r\end{array}\right.\quad (r\in\mathbb{R})\quad \text{et } (d_2)\left\{\begin{array}{l c l}x &=& 1-s\\y &=& -1+s\\z &=& 2-s\end{array}\right.\quad (s\in\mathbb{R})$$

Les droites (d_1) et (d_2) sont :

a. sécantes. **b.** strictement parallèles.
c. confondues. **d.** non coplanaires.

3. On considère le plan (P) dont une équation cartésienne est :

$$2x - y + z - 1 = 0.$$

On considère la droite (Δ) dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{l c l}x &=& 2+u\\y &=& 4+u\\z &=& 1-u\end{array}\right.\quad (u\in\mathbb{R})$$

La droite (Δ) est :

a. sécante et non orthogonale au plan (P). b. incluse dans le plan (P).
c. strictement parallèle au plan (P). **d.** orthogonale au plan (P).

4. On considère le plan (P_1) dont une équation cartésienne est $x - 2y + z + 1 = 0$, ainsi que le plan (P_2) dont une équation cartésienne est $2x + y + z - 6 = 0$.
Les plans (P_1) et (P_2) sont :

a. sécants et perpendiculaires. **b.** confondus.
c. sécants et non perpendiculaires. **d.** strictement parallèles.

5. On considère les points E(1 ; 2 ; 1), F(2 ; 4 ; 3) et G(−2 ; 2 ; 5).
On peut affirmer que la mesure α de l'angle $\widehat{\mathrm{FEG}}$ vérifie :

a. $\alpha = 90°$ **b.** $\alpha > 90°$ **c.** $\alpha = 0°$ **d.** $\alpha \approx 71°$

EXERCICE 4 5 points

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = 5x^2 + 2x - 2x^2\ln(x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.
On admet que f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. **a.** Démontrer que la limite de la fonction f en 0 est égale à 0.
   b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
3. **a.** Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$

$$f''(x) = 4(1 - \ln(x)).$$

   b. En déduire le plus grand intervalle sur lequel la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes.
   c. Dresser le tableau des variations de la fonction f' sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   (On admettra que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = 2$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = -\infty$.)
4. **a.** Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ une unique solution α dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-2}.
   b. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ ainsi que le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
5. **a.** En utilisant l'égalité $f'(\alpha) = 0$, démontrer que :

$$\ln(\alpha) = \frac{4\alpha + 1}{2\alpha}.$$

   En déduire que $f(\alpha) = \alpha^2 + \alpha$.
   b. En déduire un encadrement d'amplitude 10^{-1} du maximum de la fonction f.

∽ Baccalauréat Nouvelle-Calédonie 29 août 2023 Jour 2 ∼
ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

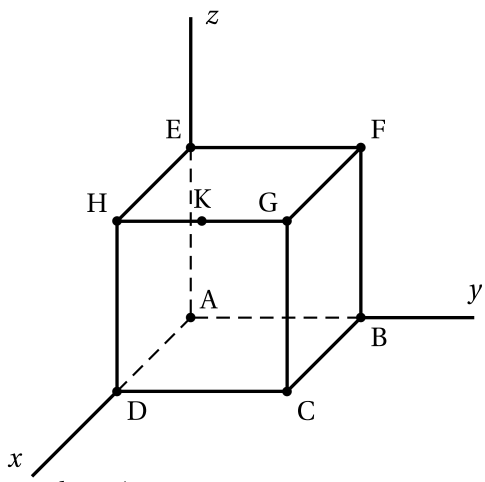
Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé

Le sujet propose 4 exercices

EXERCICE 1 5 points

On considère le cube ABCDEFGH d'arête 1 représenté ci-contre.
On note K le milieu du segment [HG].
On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}\right)$.



1. Justifier que les points C, F et K définissent un plan.
2. **a.** Donner, sans justifier, les longueurs KG, GF et GC.
   b. Calculer l'aire du triangle FGC.
   c. Calculer le volume du tétraèdre FGCK.

On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par :

$$V = \frac{1}{3}\mathscr{B} \times h,$$

où $\mathscr{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur correspondante.

3. **a.** On note $\overrightarrow{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.
   Démontrer que $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (CFK).
   b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (CFK) est :
   $$x + 2y + z - 3 = 0.$$
4. On note Δ la droite passant par le point G et orthogonale au plan (CFK).
   Démontrer qu'une représentation paramétrique de la droite Δ est :
   $$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+t\\ y &=& 1+2t \qquad (t \in \mathbb{R}))\\ z &=& 1+t\end{array}\right.$$
5. Soit L le point d'intersection entre la droite Δ et le plan (CFK).
   a. Déterminer les coordonnées du point L.
   b. En déduire que $LG = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$.
6. En utilisant la question 2., déterminer la valeur exacte de l'aire du triangle CFK.

EXERCICE 2 **5 points**

On considère la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.
On admet que f est deux fois dérivable sur $[0~;~+\infty[$.
On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. En remarquant que pour tout x dans $[0~;~+\infty[$, on a

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^{x}}.$$

démontrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ possède une asymptote en $+\infty$ dont on donnera une équation.

2. Démontrer que pour tout réel x appartenant à $[0~;~+\infty[$:

$$f'(x) = (1-x)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

3. Dresser le tableau de variations de f sur $[0~;~+\infty[$, sur lequel on fera figurer les valeurs aux bornes ainsi que la valeur exacte de l'extremum.

4. Déterminer, sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$, le nombre de solutions de l'équation

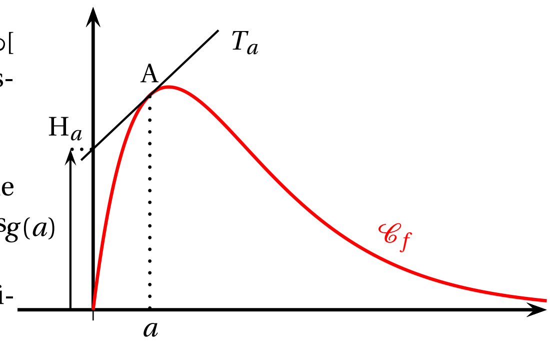
$$f(x) = \frac{367}{1\,000}.$$

5. On admet que pour tout x appartenant à $[0~;~+\infty[$:

$$f''(x) = \mathrm{e}^{-x}(x-2).$$

Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

6. Soit a un réel appartenant à $[0~;~+\infty[$ et A le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a.
On note T_a la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A.
On note H_a le point d'intersection de la droite T_a et de l'axe des ordonnées.
On note $g(a)$ l'ordonnée de H_a.
La situation est représentée sur la figure ci-contre.



a. Démontrer qu'une équation réduite de la tangente T_a est :

$$y = \left[(1-a)\,\mathrm{e}^{-a}\right]x + a^2\,\mathrm{e}^{-a}.$$

b. En déduire l'expression de $g(a)$.

c. Démontrer que $g(a)$ est maximum lorsque A est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

EXERCICE 3 5 points

On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{-u_n - 4}{u_n + 3}.$$

On admet que u_n est défini pour tout entier naturel n.

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2.
2. On considère la fonction `terme` ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python :

```
def terme (n) :
    u = ...
    for i in range(n):
      u = ...
    return(u)
```

On rappelle qu'en langage Python, « `i in range (n)` » signifie que i varie de 0 à $n-1$.

Recopier et compléter le cadre ci-dessus de sorte que, pour tout entier naturel n, l'instruction `terme (n)` renvoie la valeur de u_n.

3. Soit la fonction f définie sur $]-3\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{-x-4}{x+3}.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = f(u_n)$.
Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $]-3\,;\,+\infty[$.

4. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$-2 < u_{n+1} \leqslant u_n.$$

5. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
6. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{1}{u_n + 2}.$$

   a. Donner v_0.
   b. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison 1.
   c. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$u_n = \frac{1}{n+0,5} - 2.$$

   d. Déterminer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 4 5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une absence de réponse, ou une réponse multiple, ne rapporte ni n'enlève de point.

L'énoncé ci-dessous est commun aux questions 1. et 2.

Les 200 adhérents d'un club sont des filles ou des garçons. Ces adhérents pratiquent l'aviron ou le basket selon la répartition figurant dans le tableau ci-dessous.

	Aviron	**Basket**	**Total**
Filles	25	80	105
Garçons	50	45	95
Total	75	125	200

On choisit un adhérent au hasard et on considère les évènements suivants :

F : l'adhérent est une fille ;

A : l'adhérent pratique l'aviron.

1. La probabilité de F sachant A est égale à :

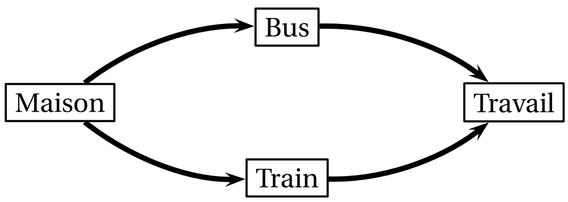
a. $\dfrac{25}{100}$ **b.** $\dfrac{25}{75}$ **c.** $\dfrac{25}{105}$ **d.** $\dfrac{75}{105}$

2. La probabilité de l'évènement $A \cup F$ est égale à :

a. $\dfrac{9}{10}$ **b.** $\dfrac{1}{8}$ **c.** $\dfrac{31}{40}$ **d.** $\dfrac{5}{36}$

L'énoncé ci-dessous est commun aux questions 3. et 4.

Pour se rendre à son travail, Albert peut utiliser au choix le bus ou le train.



La probabilité que le bus soit en panne est égale à b.
La probabilité que le train soit en panne est égale à t.
Les pannes de bus et de train surviennent de façon indépendante.

3. La probabilité p_1 que le bus ou le train soient en panne est égale à :

a. $p_1 = bt$ **b.** $p_1 = 1 - bt$ **c.** $p_1 = b + t$ **d.** $p_1 = b + t - bt$

4. La probabilité p_2 que Albert puisse se rendre à son travail est égale à :

a. $p_2 = bt$ **b.** $p_2 = 1 - bt$ **c.** $p_2 = b + t$ **d.** $p_2 = b + t - bt$

5. On considère une pièce de monnaie pour laquelle la probabilité d'obtenir FACE est égale à x.
On lance la pièce n fois. Les lancers sont indépendants.
La probabilité p d'obtenir au moins une fois FACE sur les n lancers est égale à

a. $p = x^n$ **b.** $p = (1 - x)^n$ **c.** $p = 1 - x^n$ **d.** $p = 1 - (1 - x)^n$

∽ Baccalauréat Polynésie 7 septembre 2023 ∾

Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 4 heures
L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.
Sauf mention contraire, toute réponse devra être justifiée.

EXERCICE 1 4 points **Thème : probabilités**

Une concession automobile vend des véhicules à moteur électrique et des véhicules à moteur thermique.
Certains clients, avant de se rendre sur le site de la concession, ont consulté la plateforme numérique de la concession. On a ainsi observé que :

- 20 % des clients sont intéressés par les véhicules à moteur électrique et 80 % préfèrent s'orienter vers l'achat d'un véhicule à moteur thermique ;
- lorsqu'un client souhaite acheter un véhicule à moteur électrique, la probabilité pour que le client ait consulté la plate-forme numérique est de $0,5$;
- lorsqu'un client souhaite acheter un véhicule à moteur thermique, la probabilité pour que le client ait consulté la plate-forme numérique est de $0,375$.

On considère les évènements suivants :

- C : « un client a consulté la plate-forme numérique » ;
- E : « un client souhaite acquérir un véhicule à moteur électrique » ;
- T : « un client souhaite acquérir un véhicule à moteur thermique ».

Les clients font des choix indépendants les uns des autres.

1. **a.** Calculer la probabilité qu'un client choisi au hasard souhaite acquérir un véhicule à moteur électrique et ait consulté la plate-forme numérique.
   On pourra utiliser un arbre pondéré.
   b. Démontrer que $P(C) = 0,4$.
   c. On suppose qu'un client a consulté la plate-forme numérique.
   Calculer la probabilité que le client souhaite acheter un véhicule à moteur électrique.
2. La concession accueille quotidiennement 17 clients en moyenne.
   On note X la variable aléatoire donnant le nombre de clients souhaitant acquérir un véhicule à moteur électrique.
   a. Préciser la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X.
   b. Calculer la probabilité qu'au moins trois des clients souhaitent acheter un véhicule à moteur électrique lors d'une journée.
   Donner le résultat arrondi à 10^{-2} près.

Exercice 2 6 points **Thème : fonctions**

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \mathrm{e}^{-x} + x.$$

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
   a. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$f''(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right) \mathrm{e}^{-x}.$$
   b. En déduire les variations et le minimum de la fonction f' sur $\mathbb{R}$.
   c. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$.
   d. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
   e. Donner une valeur arrondie à 10^{-3} de cette solution.

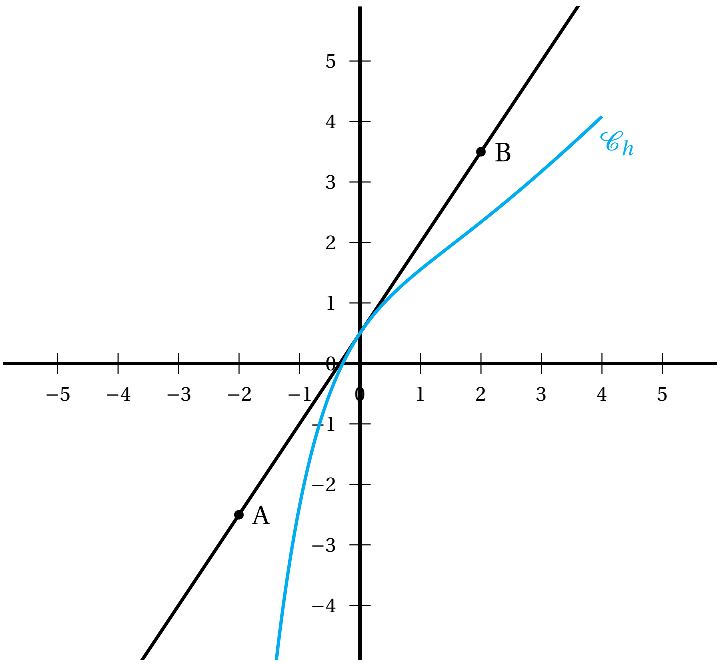
Partie B

On considère une fonction h, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, ayant une expression de la forme

$$h(x) = (ax + b)\,\mathrm{e}^{-x} + x, \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux réels.}$$

Dans un repère orthonormé ci-après figurent :

- la courbe représentative $\mathscr{C}_h$ de la fonction h ;
- les points A et B de coordonnées respectives $(-2\,;\,-2,5)$ et $(2\,;\,3,5)$.



1. Conjecturer, avec la précision permise par le graphique, les abscisses des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de la fonction h.
2. Sachant que la fonction h admet sur $\mathbb{R}$ une dérivée seconde d'expression

$$h''(x) = -\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x}.$$

valider ou non la conjecture précédente.
3. Déterminer une équation de la droite (AB).
4. Sachant que la droite (AB) est tangente à la courbe représentative de la fonction h au point d'abscisse 0, en déduire les valeurs de a et b.

EXERCICE 3 5 points **Thème : suites, algorithmique**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 3.$$

1. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire, que pour tout x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{4}{3}~;~2\right]$, $f(x)$ appartient à l'intervalle $\left[\frac{4}{3}~;~2\right]$.
3. Démontrer que pour tout x réel, $x \leqslant f(x)$.
   Pour cela, on pourra démontrer que pour tout réel x :

$$f(x) - x = \frac{3}{4}(x-2)^2.$$

On considère la suite (u_n) définie par un réel u_0 et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

On a donc, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n^2 - 2u_n + 3.$$

4. Étude du cas : $\frac{4}{3} \leqslant u_0 \leqslant 2$.
   a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2.$$

   b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
   c. Prouver que la limite de la suite est égale à 2.
5. Étude du cas particulier : $u_0 = 3$.
   On admet que dans ce cas la suite (u_n) tend vers $+\infty$.
   Recopier et compléter la fonction « `seuil` » suivante écrite en Python, afin qu'elle renvoie la plus petite valeur de n telle que u_n soit supérieur ou égal à 100.

```
def seuil() :
  u = 3
  n = 0
  while ...
      u = ...
      n = ...
  return n
```

6. Étude du cas : $u_0 > 2$.
À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que (u_n) n'est pas convergente.

EXERCICE 4 5 points **Thème : géométrie dans l'espace**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question traitée et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ dans lequel on considère :

- les points A(6 ; −6 ; 6), B(−6 ; 0 ; 6) et C(−2 ; −2 ; 11).
- la droite (d) orthogonale aux deux droites sécantes (AB) et (BC) et passant par le point A;
- la droite (d') de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -6-8t \\ y & = & 4t, \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}. \\ z & = & 6+5t \end{array}\right.$$

Question 1
Parmi les vecteurs suivants, lequel est un vecteur directeur de la droite (d) ?

a. $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}-6\\3\\0\end{pmatrix}$ **b.** $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}1\\2\\6\end{pmatrix}$ **c.** $\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix}1\\2\\0,2\end{pmatrix}$ **d.** $\overrightarrow{u_4}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

Question 2
Parmi les équations suivantes, laquelle est une représentation paramétrique de la droite (AB) ?

a. $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2t+6 \\ y & = & -6 \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \\ z & = & t+6 \end{array}\right.$ **b.** $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2t-6 \\ y & = & -6 \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \\ z & = & -t-6 \end{array}\right.$

c. $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2t+6 \\ y & = & -t-6 \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \\ z & = & 6 \end{array}\right.$ **d.** $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2t+6 \\ y & = & t-6 \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \\ z & = & 6 \end{array}\right.$

Question 3
Un vecteur directeur de la droite (d') est :

a. $\overrightarrow{v_1}\begin{pmatrix}-6\\0\\6\end{pmatrix}$ **b.** $\overrightarrow{v_2}\begin{pmatrix}-14\\4\\11\end{pmatrix}$ **c.** $\overrightarrow{v_3}\begin{pmatrix}8\\-4\\-5\end{pmatrix}$ **d.** $\overrightarrow{v_4}\begin{pmatrix}8\\4\\5\end{pmatrix}$

Question 4

Lequel des quatre points suivants appartient à la droite $\left(d'\right)$?

a. $\mathrm{M}_1(50~;~-28~;~-29)$ **b.** $\mathrm{M}_2(-14~;~-4~;~1)$

c. $\mathrm{M}_3(2~;~-4~;~-1)$ **d.** $\mathrm{M}_4(-3~;~0~;~3)$

Question 5

Le plan d'équation $x = 1$ a pour vecteur normal :

a. $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ **b.** $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ **c.** $\overrightarrow{n_3}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ **d.** $\overrightarrow{n_4}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

∽ Baccalauréat Métropole 11 septembre 2023 ∽

Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **4 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{x^2-3}.$$

Une des primitives F de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est définie par :

a. $F(x) = 2x\,\mathrm{e}^{x^2-3}$ **b.** $F(x) = \left(2x^2+1\right)\mathrm{e}^{x^2-3}$
c. $F(x) = \frac{1}{2}x\,\mathrm{e}^{x^2-3}$ **d.** $F(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2-3}$

2. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \mathrm{e}^{2n+1}.$$

La suite (u_n) est :

a. arithmétique de raison 2 ; **b.** géométrique de raison e ;
c. géométrique de raison e^2 ; **d.** convergente vers e.

Pour les questions **3.** et **4.**, on considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 15 \quad \text{et pour tout entier naturel } n \quad : u_{n+1} = 1,2u_n + 12.$$

3. La fonction Python suivante, dont la ligne 4 est incomplète, doit renvoyer la plus petite valeur de l'entier n telle que $u_n > 10\,000$.

```
def seuil() :
    n=0
    u=15
    while ......:
      n=n+1
      u=1,2*u+12
    return(n)
```

À la ligne 4, on complète par :

a. $u \leqslant 10\,000$; **b.** $u = 10\,000$ **c.** $u > 10\,000$; **d.** $n \leqslant 10\,000$.

4. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_n + 60$.
La suite (v_n) est :

a. une suite décroissante;
b. une suite géométrique de raison 1,2;
c. une suite arithmétique de raison 60;
d. une suite ni géométrique ni arithmétique.

EXERCICE 2 **5 points**

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath},\,\overrightarrow{k}\right)$.
On considère les points

$$\mathrm{A}(1\,;\,0\,;\,-1),\quad \mathrm{B}(3\,;\,-1\,;\,2),\quad \mathrm{C}(2\,;\,-2\,;\,-1)\quad \text{et}\quad \mathrm{D}(4\,;\,-1\,;\,-2).$$

On note Δ la droite de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{lcr} x &=& 0\\ y &=& 2+t\\ z &=& -1+t\end{array}\right., \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

1. **a.** Montrer que les points A, B et C définissent un plan que l'on notera $\mathscr{P}$.
b. Montrer que la droite (CD) est orthogonale au plan $\mathscr{P}$.
Sur le plan $\mathscr{P}$, que représente le point C par rapport à D?
c. Montrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est : $2x + y - z - 3 = 0$.

2. **a.** Calculer la distance CD.
b. Existe-t-il un point M du plan $\mathscr{P}$ différent de C vérifiant $\mathrm{MD} = \sqrt{6}$? Justifier la réponse.

3. **a.** Montrer que la droite Δ est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.
Soit H le projeté orthogonal du point D sur la droite Δ.
b. Montrer que H est le point de Δ associé à la valeur $t = -2$ dans la représentation paramétrique de Δ donnée ci-dessus.
c. En déduire la distance du point D à la droite Δ.

EXERCICE 3 **4 points**

*Les parties **A** et **B** sont indépendantes.*
Les probabilités demandées seront données à 10^{-3} *près.*
Pour aider à la détection de certaines allergies, on peut procéder à un test sanguin dont le résultat est soit positif, soit négatif.
Dans une population, ce test donne les résultats suivants :

— Si un individu est allergique, le test est positif dans 97 % des cas;
— Si un individu n'est pas allergique, le test est négatif dans 95,7 % des cas.

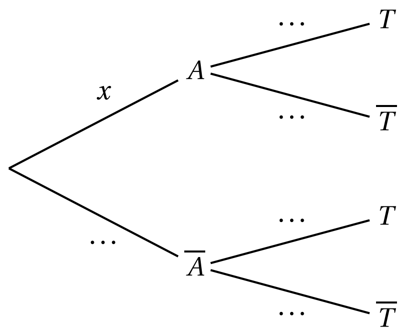
Par ailleurs, 20 % des individus de la population concernée présentent un test positif.
On choisit au hasard un individu dans la population, et on note :

- A l'évènement « l'individu est allergique »;
- T l'évènement « l'individu présente un test positif ».

On notera $\overline{A}$ et $\overline{T}$ les évènements contraires de A et T. On appelle par ailleurs x la probabilité de l'évènement A : $x = p(A)$.

Partie A

1. Reproduire et compléter l'arbre ci-contre décrivant la situation, en indiquant sur chaque branche la probabilité correspondante.



2. **a.** Démontrer l'égalité : $p(T) = 0,927x + 0,043$.
   b. En déduire la probabilité que l'individu choisi soit allergique.
3. Justifier par un calcul l'affirmation suivante :
   « Si le test d'un individu choisi au hasard est positif, il y a plus de 80 % de chances que cet individu soit allergique ».

Partie B

On réalise une enquête sur les allergies dans une ville en interrogeant 150 habitants choisis au hasard, et on admet que ce choix se ramène à des tirages successifs indépendants avec remise.
On sait que la probabilité qu'un habitant choisi au hasard dans cette ville soit allergique est égale à $0,08$.
On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de 150 habitants choisis au hasard associe le nombre de personnes allergiques dans cet échantillon.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?
   Préciser ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité que 20 personnes exactement parmi les 150 interrogées soient allergiques.
3. Déterminer la probabilité qu'au moins 10 % des personnes parmi les 150 interrogées soient allergiques.

EXERCICE 4 — 7 points

PARTIE A

On définit sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ la fonction g par :

$$g(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \ln x \quad \text{où ln désigne la fonction logarithme népérien.}$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0\,;+\infty[= I$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Montrer que pour $x > 0$, le signe de $g'(x)$ est celui du trinôme du second degré $\left(x^2 - 2x + 2\right)$.
2. En déduire que la fonction g est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0{,}5\,;\,1]$, que l'on notera α.
4. On donne le tableau de signes de g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[= I$:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	

   Justifier ce tableau de signes à l'aide des résultats obtenus aux questions précédentes.

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[= I$ par :

$$f(x) = \text{e}^{x} \ln x.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0~;~+\infty[$, on note f' sa fonction dérivée, f'' sa fonction dérivée seconde et on admet que :

   pour tout nombre réel $x > 0$, $f'(x) = \text{e}^{x}\left(\dfrac{1}{x} + \ln x\right)$.

   Démontrer que, pour tout nombre réel $x > 0$, on a : $f''(x) = \text{e}^{x}\left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \ln x\right)$.
2. On pourra remarquer que pour tout réel $x > 0$, $f''(x) = \text{e}^{x} \times g(x)$, où g désigne la fonction étudiée dans la partie A.
3. **a.** Dresser le tableau de signes de la fonction f sur $]0~;~+\infty[$. Justifier.

   b. Justifier que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un unique point d'inflexion A.

   c. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$. Justifier.
4. **a.** Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

   b. Montrer que $f'(\alpha) = \dfrac{\text{e}^{\alpha}}{\alpha^2}(1 - \alpha)$.

   On rappelle que α est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$.

   c. Démontrer que $f'(\alpha) > 0$ et en déduire le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à $]0~;~+\infty[$.

   d. En déduire le tableau de variations complet de la fonction f sur $]0~;~+\infty[$.

Baccalauréat Métropole et La Réunion – 12 septembre 2023

Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **5 points**

La paratuberculose est une maladie digestive infectieuse qui touche les vaches. Elle est due à la présence d'une bactérie dans l'intestin de la vache.
On réalise une étude dans une région dont 0,4 % de la population de vaches est infectée.
Il existe un test qui met en évidence la réaction immunitaire de l'organisme infecté par la bactérie.
Le résultat de ce test peut être soit « positif », soit « négatif ».
On choisit une vache au hasard dans la région.
Compte tenu des caractéristiques du test, on sait que :

— Si la vache est atteinte par l'infection, la probabilité que son test soit positif est de $0,992$;

— Si la vache n'est pas atteinte par l'infection, la probabilité que son test soit négatif est de 0,984 .

On désigne par :

— I l'évènement « la vache est atteinte par l'infection » ;

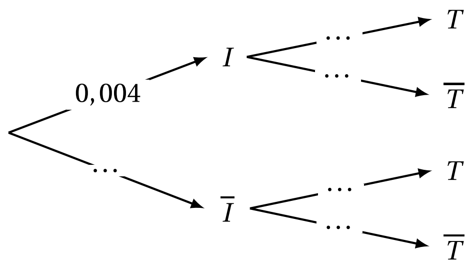
— T l'évènement « la vache présente un test positif ».

On note $\overline{I}$ l'évènement contraire de I et $\overline{T}$ l'évènement contraire de T.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

1. Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous modélisant la situation.



2. **a.** Calculer la probabilité que la vache ne soit pas atteinte par l'infection et que son test soit négatif. On donnera le résultat à 10^{-3} près.

   b. Montrer que la probabilité, à 10^{-3} près, que la vache présente un test positif est environ égale à 0,020.

   c. La « valeur prédictive positive du test » est la probabilité que la vache soit atteinte par l'infection sachant que son test est positif. Calculer la valeur prédictive positive de ce test. On donnera le résultat à 10^{-3} près.

   d. Le test donne une information erronée sur l'état de santé de la vache lorsque la vache n'est pas infectée et présente un résultat positif au test ou lorsque la vache est infectée et présente un résultat négatif au test.

   Calculer la probabilité que ce test donne une information erronée sur l'état de santé de la vache. On donnera un résultat à 10^{-3} près.

Partie B

3. Lorsqu'on choisit au hasard dans la région un échantillon de 100 vaches, on assimile ce choix à un tirage avec remise.

On rappelle que, pour une vache choisie au hasard dans la région, la probabilité que le test soit positif est égale à 0,02.

On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de 100 vaches de la région choisies au hasard associe le nombre de vaches présentant un test positif dans cet échantillon.

a. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier la réponse et préciser les paramètres de cette loi.

b. Calculer la probabilité que dans un échantillon de 100 vaches, il y ait exactement 3 vaches présentant un test positif. On donnera un résultat à 10^{-3} près.

c. Calculer la probabilité que dans un échantillon de 100 vaches, il y ait au plus 3 vaches présentant un test positif. On donnera un résultat à 10^{-3} près.

4. On choisit à présent un échantillon de n vaches dans cette région, n étant un entier naturel non nul. On admet que l'on peut assimiler ce choix à un tirage avec remise.

Déterminer la valeur minimale de n pour que la probabilité qu'il y ait, dans l'échantillon, au moins une vache testée positive, soit supérieure ou égale à 0,99.

EXERCICE 2 **5 points**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

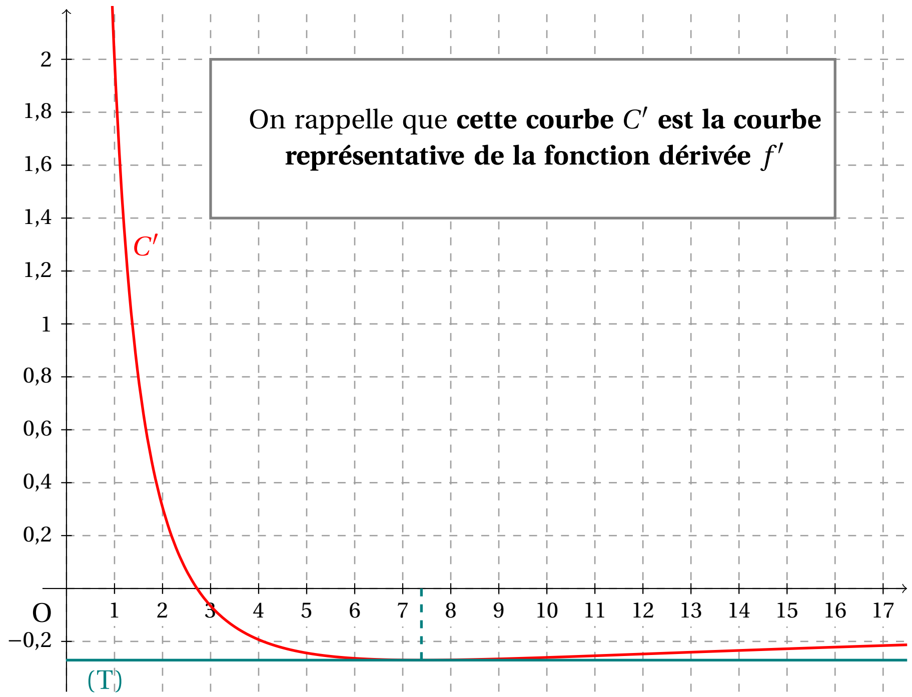
$$f(x) = (2 - \ln x) \times \ln x,$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.

On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal et C' la courbe représentative de la fonction f', fonction dérivée de la fonction f.

La **courbe C'** est donnée ci-dessous ainsi que son unique tangente horizontale (T).



1. Par lecture graphique, avec la précision que permet le tracé ci-dessus, donner :

   a. le coefficient directeur de la tangente à C au point d'abscisse 1.

   b. le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

2. **a.** Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

   b. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.

3. Montrer que la courbe C coupe l'axe des abscisses en deux points exactement dont on précisera les coordonnées.

4. **a.** Montrer que pour tout réel x appartenant à $]0~;~+\infty[$, $\quad f'(x) = \dfrac{2(1 - \ln x)}{x}$.

   b. En déduire, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur $]0~;~+\infty[$.

5. On note f'' la dérivée seconde de f et on admet que pour tout réel x appartenant à $]0~;~+\infty[$, $f''(x) = \dfrac{2(\ln x - 2)}{x^2}$.

   Déterminer par le calcul le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe et préciser les coordonnées du point d'inflexion de la courbe C.

EXERCICE 3 **5 points**

On considère la suite (u_n) définie par : $\left\{\begin{array}{lcl} u_1 & = & \dfrac{1}{\text{e}} \\ u_{n+1} & = & \dfrac{1}{\text{e}}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) u_n \text{ pour tout entier } n \geqslant 1. \end{array}\right.$

1. Calculer les valeurs exactes de u_2 et u_3. On détaillera les calculs.

2. On considère une fonction écrite en langage Python qui, pour un entier naturel n donné, affiche le terme u_n. Compléter les lignes L_2 et L_4 de ce programme.

L_1	`def suite(n):`
L_2	`..................`
L_3	`for i in range(1, n):`
L_4	`u=.................`
L_5	`return u`

3. On admet que tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs.

   a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $1 + \dfrac{1}{n} \leqslant \text{e}$.

   b. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

   c. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier votre réponse.

4. **a.** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul, on a : $\quad u_n = \dfrac{n}{\text{e}^n}$.

   b. En déduire, si elle existe, la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 4 **5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$.

On considère :
les points A$(-1~;~-2~;~3)$, B$(1~;~-2~;~7)$ et C$(1~;~0~;~2)$;
la droite Δ de représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{l} x = 1 - t \\ y = 2 \\ z = -4 + 3t \end{array}\right.$, où $t \in \mathbb{R}$;
le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne : $3x + 2y + z - 4 = 0$;
le plan $\mathscr{Q}$ d'équation cartésienne : $-6x - 4y - 2z + 7 = 0$.

1. Lequel des points suivants appartient au plan $\mathscr{P}$?
   a. $R(1~;~-3~;~1)$; **b.** $S(1~;~2~;~-1)$; **c.** $T(1~;~0~;~1)$; **d.** $U(2~;~-1~;~1)$.

2. Le triangle ABC est :
   a. équilatéral; **b.** rectangle isocèle;
   c. isocèle non rectangle; **d.** rectangle non isocèle.

3. La droite Δ est :
   a. orthogonale au plan $\mathscr{P}$; **b.** sécante au plan $\mathscr{P}$;
   c. incluse dans le plan $\mathscr{P}$; **d.** strictement parallèle au plan $\mathscr{P}$.

4. On donne le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = 20$.
   Une mesure au degré près de l'angle $\widehat{\mathrm{ABC}}$ est :
   a. $34°$; **b.** $120°$; **c.** $90°$; **d.** $0°$.

5. L'intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ est :
   a. un plan; **b.** l'ensemble vide;
   c. une droite; **d.** réduite à un point.

Baccalauréat Amérique du Sud 26 septembre 2023
ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ Jour 1

Exercice 1 **5 points**

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'ensemble $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 1 + x^2 - 2x^2\ln(x).$$

On admet que f est dérivable sur l'intervalle et on note f' sa fonction dérivée

1. Justifier que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ et, en remarquant que $f(x) = 1 + x^2(1 - 2\ln(x))$, justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
2. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = -4x\ln(x)$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, puis dresser le tableau de variation de la fonction sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
4. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$ et que $\alpha \in [1\,;\,\mathrm{e}]$.

On admet dans la suite de l'exercice, que l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $]0;\,1]$.

5. On donne la fonction ci-dessous écrit en Python. L'instruction *from lycee import ** permet d'accéder à la fonction ln.

```
from lycee import *

def f(x) :
    return 1+x**2-2*x**2*ln(x)

def dichotomie(p) :
    a=1
    b=2.7
    while b-a > 10**(-p) :
    |   if f(a)*f((a+b)/2) < 0 :
    |   |  b = (a+b)/2
    |   else :
    |   |  a=(a+b)/2
    |     return (a,b)
```

   Il écrit dans la console d'exécution :

   `>>> dichotomie(1)`

   Parmi les quatre propositions ci-dessous, recopier celle affichée par l'instruction précédente ? Justifier votre réponse (on pourra procéder par élimination)

Proposition A :	(1.75, 1.9031250000000002)
Proposition B :	(1.85, 1.9031250000000002)
Proposition C :	(2.75, 2.9031250000000002)
Proposition D :	(2.85, 2.9031250000000002)

Partie B

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, par

$$g(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}.$$

On admet que g est dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.
On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans le plan rapporté à un repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $g'(x) = \dfrac{f(x)}{x\left(1+x^2\right)^2}$.

2. Démontrer que la fonction g admet un maximum en $x = \alpha$.

On admet que $g(\alpha) = \dfrac{1}{2\alpha^2}$.

3. On note T_1 la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 1 et on note T_α la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse α.

Déterminer, en fonction de α, les coordonnées du point d'intersection des droites T_1 et T_α.

Exercice 2 **5 points**

1. Entre 1998 et 2020, en France 18 221 965 accouchements ont été recensés, parmi lesquels 293 898 ont donné naissance à des jumeaux et 4 921 ont donné naissance à au moins trois enfants.

a. Avec une précision de 0,1 % calculer parmi tous les accouchements recensés, le pourcentage d'accouchements donnant naissance à des jumeaux sur la période 1998-2020.

b. Vérifier que le pourcentage d'accouchements qui ont donné naissance à au moins trois enfants est inférieur à 0,1 %.

On considère alors que ce pourcentage est négligeable.

On appelle accouchement ordinaire, un accouchement donnant naissance à un seul enfant.

On appelle accouchement double, un accouchement donnant naissance à exactement deux enfants.

On considère dans la suite de l'exercice qu'un accouchement est soit ordinaire, soit double.

La probabilité d'un accouchement ordinaire est égale à $0,984$ et celle d'un accouchement double est alors égale à $0,016$.

Les probabilités calculées dans la suite seront arrondies au millième.

2. On admet qu'un jour donné dans une maternité, on réalise n accouchements.

On considère que ces n accouchements sont indépendants les uns des autres.

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'accouchements doubles pratiqués ce jour.

a. Dans le cas où $n = 20$, préciser la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X et calculer la probabilité qu'on réalise exactement un accouchement double.

b. Par la méthode de votre choix que vous expliciterez, déterminer la plus petite valeur de n telle que $p(X \geqslant 1) \geqslant 0,99$.

Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

3. Dans cette maternité, parmi les naissances double, on estime qu'il y a 30 % de jumeaux monozygotes (appelés « vrais jumeaux » qui sont obligatoirement de même sexe : deux garçons ou deux filles) et donc 70 % de jumeaux dizygotes (appelés « faux jumeaux », qui peuvent être de sexes différents : deux garçons, deux filles ou un garçon et une fille).

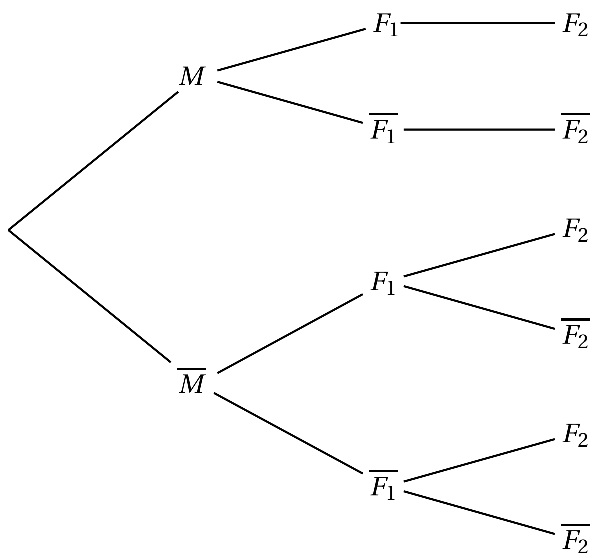
Dans le cas de naissances doubles, on admet que, comme pour les naissances ordinaires, la probabilité d'être une fille à la naissance est égale à $0,49$ et que celle d'être un garçon à la naissance est égale à $0,51$.

Dans le cas d'une naissance double de jumeaux dizygotes, on admet aussi que le sexe du second nouveau-né des jumeaux est indépendant du sexe du premier nouveau-né.

On choisit au hasard un accouchement double réalisé dans cette maternité et on considère les évènements suivants :

- M : « les jumeaux sont monozygotes » ;
- F_1 : « le premier nouveau-né est une fille » ;
- F_2 : « le second nouveau-né est une fille ».

On notera $p(A)$ la probabilité de l'évènement A et $\overline{A}$ l'évènement contraire de A.



a. Recopier puis compléter l'arbre pondéré ci-dessus.

b. Montrer que la probabilité que les deux nouveaux-nés soient des filles est 0,315 07.

c. Les deux nouveaux-nés sont des jumelles. Calculer la probabilité qu'elles soient monozygotes.

EXERCICE 3 — 5 points

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points

$$\text{A}(0 ; 4 ; 16), \quad \text{B}(0 ; 4 ; -10), \quad \text{C}(4 ; -8 ; 0) \quad \text{et} \quad \text{K}(0 ; 4 ; 3).$$

On définit la sphère S de centre K et de rayon 13 comme l'ensemble des points M tels que KM = 13.

1. **a.** Vérifier que le point C appartient à la sphère S.

b. Montrer que le triangle ABC est rectangle en C.

2. **a.** Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

b. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

3. On admet que la sphère S coupe l'axe des abscisses en deux points, l'un ayant une abscisse positive et l'autre une abscisse négative.

On note D celui qui a une abscisse positive.

a. Montrer que le point D a pour coordonnées (12 ; 0 ; 0).

b. Donner une représentation paramétrique de la droite Δ passant par D et perpendiculaire au plan (ABC).

c. Déterminer la distance du point D au plan (ABC).

4. Calculer une valeur approchée, à l'unité de volume près, du volume du tétraèdre ABCD.

On rappelle la formule du volume V d'un tétraèdre

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h.$$

où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur associée.

Exercice 4 **5 points**

Partie A

Le but de la partie A est d'étudier le comportement de la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,3$ et par la relation de récurrence, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 2u_n\left(1 - u_n\right).$$

Cette relation de récurrence s'écrit $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$, où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x(1 - x).$$

1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$.

2. On admet que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}$.

Calculer u_1 puis effectuer un raisonnement par récurrence pour démontrer que pour tout rentier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$.

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. Justifier que la limite de la suite (u_n) est égale à $\frac{1}{2}$.

Partie B

Le but de cette partie est d'étudier un modèle d'évolution d'une population.
En 2022, cette population compte 3 000 individus.

On note P_n l'effectif en milliers de la population l'année $2022 + n$. Ainsi $P_0 = 3$.
Selon un modèle inspiré du modèle de Verhulst, mathématicien belge du XIX^e siècle, on considère que, pour tout entier naturel n :

$$P_{n+1} - P_n = P_n\,(1 - b \times P_n), \text{ où } b \text{ est un réel strictement positif.}$$

Le réel b est un facteur de freinage qui permet de tenir compte du caractère limité des ressources du milieu dans lequel évoluent ces individus.

1. Dans cette question $b = 0$.

a. Justifier que la suite (P_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b. Déterminer la limite de P_n.

2. Dans cette question $b = 0,2$.

a. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = 0,1 \times P_n$.
Calculer v_0 puis montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 2v_n\,(1 - v_n)$.

b. Dans ce modèle, justifier que la population se stabilisera autour d'une valeur que l'on précisera.

Baccalauréat Amérique du Sud 27 septembre 2023
ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ Jour 2

Exercice 1 **5 points**

Partie A

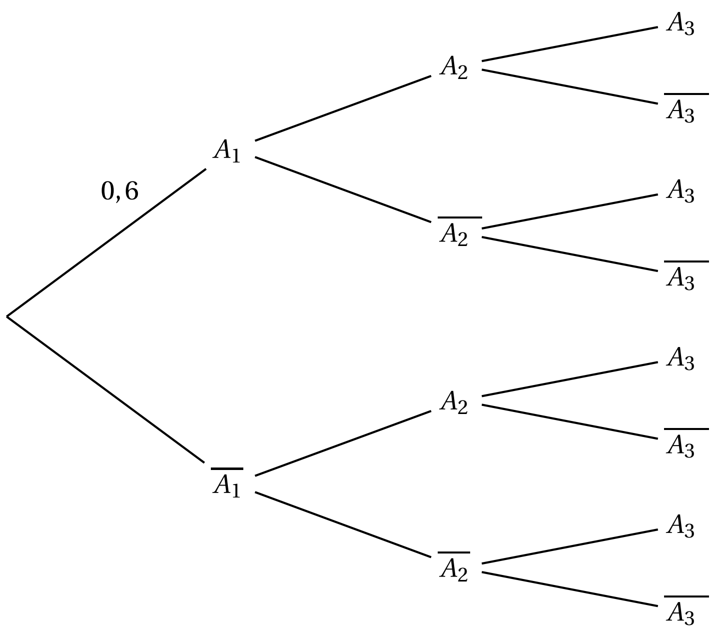
Un jeu proposé dans une fête foraine consiste à effectuer trois tirs successivement sur une cible mouvante.
On a constaté que :

- Si le joueur atteint la cible lors d'un tir alors il ne l'atteint pas lors du tir suivant dans 65 % des cas ;
- Si le joueur n'atteint pas la cible lors d'un tir alors il l'atteint lors du tir suivant dans 50 % des cas.

La probabilité qu'un joueur atteigne la cible lors de son premier tir est de $0,6$.
Pour tout évènement A, on note $p(A)$ sa probabilité et $\overline{A}$ l'évènement contraire de A.
On choisit au hasard un joueur à ce jeu de tirs.
On considère les évènements suivants :

- A_1 : « Le joueur atteint la cible lors du 1er tir »
- A_2 : « Le joueur atteint la cible lors du 2e tir »
- A_3 : « Le joueur atteint la cible lors du 3e tir ».

1. Recopier et compléter, avec les probabilités correspondantes sur chaque branche, l'arbre pondéré ci-dessous modélisant la situation.



Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où le joueur atteint sa cible au cours des trois tirs.

2. Montrer que la probabilité que le joueur atteigne exactement deux fois la cible au cours des trois tirs est égale à 0,401 5.

3. L'objectif de cette question est de calculer l'espérance de la variable aléatoire X, notée $E(X)$.

a. Recopier et compléter le tableau ci-dessous donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

$X = x_i$	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	0,1			0,073 5

b. Calculer $E(X)$.

c. Interpréter le résultat précédent dans le contexte de l'exercice.

Partie B

On considère N, un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Un groupe de N personnes se présente à ce stand pour jouer à ce jeu dans des conditions identiques et indépendantes.
Un joueur est déclaré gagnant lorsqu'il atteint trois fois la cible.
On note Y la variable aléatoire qui compte parmi les N personnes le nombre de joueurs déclarés gagnants.

1. Dans cette question, $N = 15$.

a. Justifier que Y suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

b. Donner la probabilité, arrondie à 10^{-3}, qu'exactement 5 joueurs soient gagnants à ce jeu.

2. Par la méthode de votre choix, que vous expliciterez, déterminer le nombre minimum de personnes qui doivent se présenter à ce stand pour que la probabilité qu'il y ait au moins un joueur gagnant soit supérieure ou égale à $0,98$.

Exercice 2 **5 points**

Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$ on considère les points :

$$A(1\,;\,1\,;\,-4),\quad B(2\,;\,-1\,;\,-3),\quad C(0\,;\,-1\,;\,-1)\quad \text{et}\quad \Omega(1;1;2).$$

1. Démontrer que les points A, B, et C définissent un plan.

2. **a.** Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).

b. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $x + y + z + 2 = 0$.

3. **a.** Justifier que le point Ω n'appartient pas au plan (ABC).

b. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point Ω sur le plan (ABC).
On admet que $\Omega H = 2\sqrt{3}$.
On définit la sphère S de centre Ω et de rayon $2\sqrt{3}$ comme l'ensemble de tous les points M de l'espace tels que $\Omega M = 2\sqrt{3}$.

4. Justifier, sans calcul, que tout point N du plan (ABC), distinct de H, n'appartient pas à la sphère S.
On dit qu'un plan $\mathscr{P}$ est tangent à la sphère S en un point K lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- $K \in \mathscr{P} \cap S$
- $(\Omega K) \perp \mathscr{P}$

5. Soit le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $x + y - z - 6 = 0$ et le point K de coordonnées K(3; 3; 0).
Démontrer que le plan $\mathscr{P}$ est tangent à la sphère S au point K.

6. On admet que les plans (ABC) et $\mathscr{P}$ sont sécants selon une droite (Δ).
Déterminer une équation paramétrique de la droite (Δ).

Exercice 3 **5 points**

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 5u_n - 8n + 6.$$

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Soit n un entier naturel.
Recopier et compléter la fonction `suite_u` d'argument `n` ci-dessous, écrite en langage Python, afin qu'elle retourne la valeur de u_n.

```
def suite_u(n) :
    u = ...
    for i in range(1,n+1) :
    |    u= ...
    return u
```

3. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n \geqslant 2n$.

b. En déduire la limite de la suite (u_n).

c. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout entier naturel n vérifiant, $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^p$?

4. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

5. On considère la suite (v_n), définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = u_n - 2n + 1$.

a. En dessous de la fonction `suite_u` précédente, on a écrit la fonction `suite_v` ci-dessous :

```
def suite_v(n):
    L =[]
    for i in range(n+1) :
    |    L.append(suite_u(i)-2*i+1)
    return L
```

La commande « L.append »permet de rajouter, en dernière position, un élément dans la liste L.

Lorsqu'on saisit `suite_v(5)` dans la console, on obtient l'affichage suivant :

```
>>> suite_v(5)
[1, 5, 25, 125, 625, 3125]
```

Conjecturer, pour tout entier naturel n, l'expression de v_{n+1} en fonction de v_n.
Démontrer cette conjecture.

b. En déduire, pour tout entier naturel n, la forme explicite de u_n en fonction de n.

Exercice 4 **5 points**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) + \frac{1}{4}x.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ du plan.

Partie A

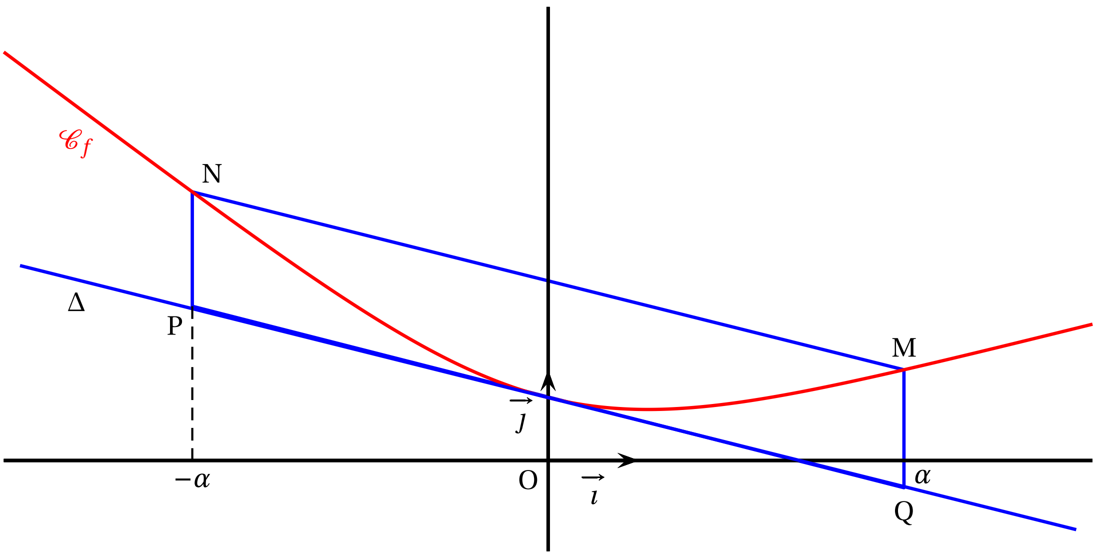
1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
   a. Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x} - 3}{4\left(\mathrm{e}^{x} + 1\right)}$.
   b. En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   c. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[2\,;\,5]$.

Partie B

On admettra que la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f''(x) = \frac{\mathrm{e}^{x}}{\left(\mathrm{e}^{x} + 1\right)^2}.$$

On note Δ la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
Dans le graphique ci-dessous, on a représenté la courbe $\mathscr{C}_f$ la tangente Δ et le quadrilatère MNPQ tel que M et N sont les deux points de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives α et $-\alpha$, et Q et P sont les deux points de la droite Δ d'abscisses respectives α et $-\alpha$.



1. **a.** Justifier le signe de $f''(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
   b. En déduire que la portion de la courbe $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[-\alpha\,;\,\alpha]$, est inscrite dans le quadrilatère MNPQ.
2. **a.** Montrer que $f(-\alpha) = \ln\left(\mathrm{e}^{-\alpha} + 1\right) + \dfrac{3}{4}\alpha$.
   b. Démontrer que le quadrilatère MNPQ est un parallélogramme.

Index