

4.1. Annexe 1 : Triangle inscrit dans un autre triangle.

Nous donnons ici deux preuves, une algébrique et l'autre géométrique, de la propriété (*) ci-dessus concernant l'aire d'un triangle inscrit dans un autre.

Première solution : L'assertion est évidemment vraie dès que deux parmi les points A, B, C se trouvent du même côté de la droite correspondante (A_0B_0) , (A_0C_0) ou (B_0C_0) , où A_0 est le milieu de $[BC]$, B_0 est le milieu de $[AC]$ et C_0 est le milieu de $[AB]$, voir la figure 13.

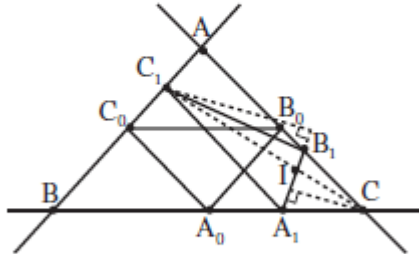


Figure 13. Type de situation immédiate :
 $\text{Aire}(A_1B_1C) \leq \text{Aire}(A_1B_1C_1)$
 car C est plus proche de I, donc de (A_1B_1)
 que C_1 . Ici I est le point d'intersection
 de (A_1B_1) et (C_1C) .

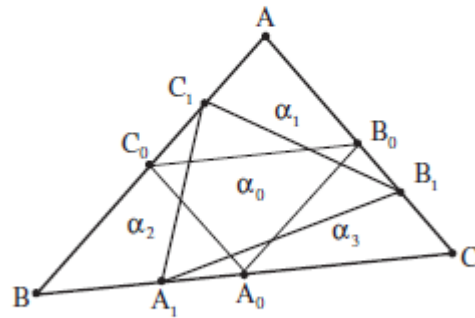


Figure 14. Les aires $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ des
 triangles définis par le triangle $A_1B_1C_1$
 inscrit dans le triangle ABC.

Si ceci n'est pas le cas, quitte à changer l'orientation, on peut considérer que C_1 appartient au segment $[AC_0]$, B_1 appartient à $[CB_0]$ et A_1 appartient à $[BA_0]$ (figure 14).

Alors on a :

$$0 \leq x, y, z \leq \frac{1}{2},$$

où

$$x = \frac{|AC_1|}{|AB|}, y = \frac{|BA_1|}{|BC|}, z = \frac{|CB_1|}{|CA|}.$$

Notons α l'aire du triangle ABC, α_0 l'aire du triangle $A_1B_1C_1$ et α_1 , resp. α_2, α_3 l'aire du triangle AB_1C_1 , resp. BA_1C_1, CA_1B_1 . Puisque

$$\frac{\alpha_1}{\alpha} = \frac{\frac{1}{2}|AB_1||AC_1|\sin \hat{A}}{\frac{1}{2}|AB||AC|\sin \hat{A}} = x(1-z),$$

et de même

$$\frac{\alpha_2}{\alpha} = y(1-x), \frac{\alpha_3}{\alpha} = z(1-y),$$

alors le rapport $f(x, y, z) = \frac{\alpha_0}{\alpha}$ s'exprime par :

$$f(x, y, z) = 1 - x - y - z + xy + xz + yz. \quad (8)$$

On remplace maintenant x, y, z par $x' = \frac{1}{2} - x$, $y' = \frac{1}{2} - y$ et $x, y, z \leq \frac{1}{2}$. Parce que $x, y, z \leq 1/2$, on a $x', y', z' \geq 0$. La fonction

$$f(x, y, z) = g(x', y', z') = \frac{1}{4} + x'y' + x'z' + y'z'$$

atteint son minimum égal à $1/4$ à l'origine $x' = y' = z' = 0$ et nulle part ailleurs. Ainsi le minimum de la fonction f est égal à $1/4$. Donc la moyenne des aires $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ est inférieure ou égale à $\alpha/4$ et l'égalité n'est possible que si $x' = y' = z' = 0$, donc $x = y = z = 1/2$, ce qui revient à $A_1 = A_0, B_1 = B_0, C_1 = C_0$, d'où l'assertion.

Deuxième solution : On passe du triangle inscrit $A_0B_0C_0$ au triangle inscrit $A_1B_1C_1$ en trois étapes, en prenant A_1 sur $[BA_0]$, B_1 sur $[CB_0]$, et C_1 sur $[AC_0]$, en augmentant chaque fois l'aire (il suffit de bien regarder les hauteurs qui correspondent à une base commune) :

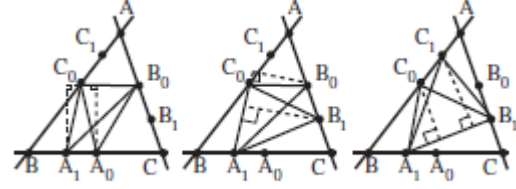


Figure 15. La situation :

$$\begin{aligned} \text{Aire}(A_0B_0C_0) &= \text{Aire}(A_1B_0C_0) \\ &\leq \text{Aire}(A_1B_1C_0) \leq \text{Aire}(A_1B_1C_1). \end{aligned}$$

$$\text{Aire}(A_0B_0C_0) = \frac{1}{4} \text{Aire}(ABC)$$

$$\leq \text{Aire}(A_1B_0C_0) \leq \text{Aire}(A_1B_1C_0) \leq \text{Aire}(A_1B_1C_1)$$

(voir Figure 15).

L'inégalité qui en résulte est stricte dès qu'un de points A_1, B_1, C_1 au moins est distinct du milieu A_0, B_0, C_0 du côté correspondant.

(8) Au lieu d'utiliser les mesures d'angles (qui exigent l'emploi d'une structure euclidienne), on peut employer la structure affine en remarquant que le rapport d'aires $\frac{\alpha_0}{\alpha}$ (qui est un invariant affine) est le déterminant 3×3 des coordonnées barycentriques des points A_1, B_1, C_1 dans le repère affine A, B, C :

$$\begin{vmatrix} 0 & y & 1-y \\ 1-z & 0 & z \\ x & 1-x & 0 \end{vmatrix} = 1 - x - y - z + xy + xz + yz.$$