

4.2. Annexe 2 : Le problème de Sylvester dans le plan complexe.

Comme contre-exemple dans le plan complexe, on peut utiliser les 9 points d'inflexion d'une cubique non dégénérée. Par exemple celle d'équation

$$x^3 + (x-1)^3 + y^3 = 0.$$

Les 9 flexes de cette cubique sont les points :

$$\begin{aligned} & p_1(0,1), p'_1\left(0, e^{\frac{2i\pi}{3}}\right), p''_1\left(0, e^{-\frac{2i\pi}{3}}\right), \\ & p_2\left(\frac{1}{2}, 0\right), p'_2\left(e^{\frac{i\pi}{3}}, 0\right), p''_2\left(e^{-\frac{i\pi}{3}}, 0\right), \\ & p_3(1,-1), p'_3\left(1, e^{-\frac{i\pi}{3}}\right), p''_3\left(1, e^{\frac{i\pi}{3}}\right) \end{aligned}$$

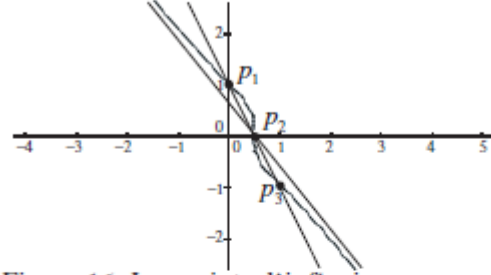


Figure 16. Les points d'inflexion p_1, p_2, p_3 de la partie réelle de la cubique d'équation $x^3 + (x-1)^3 + y^3 = 0$.

(voir Figure 16). Ces 9 points sont alignés 3 par 3, voici les 12 droites définies par ces 9 points :

$$\begin{aligned} & (p_1 p'_1 p''_1): x = 0, & (p'_1 p_2 p'_3): 2x + e^{-\frac{2i\pi}{3}} y = 1, \\ & (p_2 p'_2 p''_2): y = 0, & (p'_1 p'_2 p'_3): e^{-\frac{i\pi}{3}} x + e^{-\frac{2i\pi}{3}} y = 1, \\ & (p_3 p'_3 p''_3): x = 1, & (p'_1 p'_2 p''_3): e^{\frac{i\pi}{3}} x + e^{-\frac{2i\pi}{3}} y = 1, \\ & (p_1 p_2 p_3): 2x + y = 1, & (p''_1 p_2 p''_3): 2x + e^{\frac{2i\pi}{3}} y = 1, \\ & (p_1 p'_2 p''_3): e^{-\frac{i\pi}{3}} x + y = 1, & (p''_1 p'_2 p_3): e^{-\frac{i\pi}{3}} x + e^{-\frac{2i\pi}{3}} y = 1, \\ & (p_1 p'_2 p'_3): e^{\frac{i\pi}{3}} x + y = 1, & (p''_1 p'_2 p''_3): e^{\frac{i\pi}{3}} x + e^{\frac{2i\pi}{3}} y = 1. \end{aligned}$$