

4.3. Annexe 3 : Quelques différences entre le plan réel et le plan complexe

L'existence d'un contre-exemple complexe prouve qu'une solution du problème de Sylvester A ou du problème dual A*, repose sur d'autres propriétés que les seules propriétés d'incidence : ces propriétés sont spécifiques au plan réel, elles n'existent plus dans le plan complexe.

On rappelle tout d'abord que le corps $\mathbb{R}$ est ordonné tandis que $\mathbb{C}$ ne l'est pas, les points d'une droite complexe sont alignés mais pas ordonnés, ce qui est une première différence fondamentale. Il y en a d'autres que nous allons détailler plus loin.

4.3.1. Différence topologique

Une droite affine partage le plan affine réel en deux régions disjointes, tandis qu'une droite complexe ne partage pas le plan complexe $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$, en deux régions. On peut interpréter cela en raisonnant sur les dimensions : une droite complexe est un $\mathbb{R}$ -sous-espace de dimension 2 dans le plan complexe qui est un $\mathbb{R}$ -espace de dimension 4, il faut un $\mathbb{R}$ -sous-espace de dimension 3 pour partager le plan complexe.

On peut aussi voir cela à l'aide de la fonction affine

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto ax + by + c,$$

où $(a, b) \neq (0, 0)$. Cette fonction change de signe en s'annulant lorsqu'on traverse la droite d'équation $ax + by + c = 0$. Par conséquent cette dernière droite partage le plan $\mathbb{R}^2$ en deux demi-plans.

En revanche, si l'on raisonne avec une fonction $f : \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, il n'y a plus de signe et le passage par 0 n'est plus une obligation pour trouver un chemin allant d'un point (x_1, y_1) à un autre (x_2, y_2) tel que

$$ax_1 + by_1 + c = -ax_2 - by_2 - c.$$

Un exemple simple, avec la fonction exponentielle : on a à la fois pour tout z complexe,

$$e^z \neq 0 \text{ et } e^{i(z+\pi)} = -e^{iz}.$$

Par suite, une formule analogue à celle d'Euler-Poincaré liant le nombre de droites, le nombre de points d'intersection des droites et de régions du plan limités par ces droites, n'existe pas dans $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$.

4.3.2. Alignement dans le sens complexe

La notion de distance entre les points existe bien dans le plan complexe $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$, mais l'égalité

$$d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$$

caractérise l'alignement des points A, B, C sur une droite réelle, pas sur une droite complexe.

Reprenons les trois points de l'exemple ci-dessus :

$$p_1(0,1), p_1' \left(0, e^{2i\frac{\pi}{3}} \right), p_1'' \left(0, e^{-2i\frac{\pi}{3}} \right),$$

qui sont alignés sur la droite d'équation $x = 0$.

On peut calculer les trois distances :

$$p_1 p_1' = \left| 1 - e^{2i\frac{\pi}{3}} \right| = \sqrt{3},$$

$$p_1 p_1'' = \left| 1 - e^{-2i\frac{\pi}{3}} \right| = \sqrt{3},$$

$$p_1' p_1'' = \left| e^{2i\frac{\pi}{3}} - e^{-2i\frac{\pi}{3}} \right| = \sqrt{3}.$$

On voit que trois points du plan complexe $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ peuvent être équidistants et alignés c'est-à-dire, situés sur la même droite complexe.

4.3.3. Angle dans le plan complexe

La notion d'angle peut être envisagée.

Aura-t-on un angle nul (ou un angle plat) entre deux vecteurs colinéaires du plan complexe ?

A priori, les vecteurs unitaires d'une droite vectorielle complexe forment un cercle unité, ils sont colinéaires par hypothèse. Doit-on décider que l'angle entre deux vecteurs colinéaires du plan complexe est l'angle nul ou le même que celui entre deux vecteurs du plan réel (une droite vectorielle du plan complexe est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2) ?

Pour voir les choses autrement, on sait que la notion d'angle dans le plan euclidien réel est liée à la notion de rotation dans ce plan : la matrice de la rotation ϕ , telle que l'image du vecteur unitaire u est le vecteur unitaire $v = \phi(u)$ (dans une base orthonormée), est une matrice spéciale orthogonale de la forme

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

L'angle α associé à cette matrice ou cette rotation est l'angle du couple de vecteurs unitaires (u, v) .

Soit maintenant (u, v) un couple de vecteurs unitaires dans le plan affine complexe $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ muni du produit scalaire hermitien. Alors la matrice de « l'isométrie positive » ϕ telle que l'image du vecteur u est le vecteur $v = \phi(u)$ (dans une base orthonormée) est une matrice spéciale unitaire de la forme

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Ici a, b sont des nombres complexes tels que

$$a\bar{a} + b\bar{b} = |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

En posant

$$|a| = \cos \alpha, \quad |b| = \sin \alpha,$$

avec $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, cette matrice s'écrit encore

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta_1} \cos \alpha & -e^{-i\theta_2} \sin \alpha \\ e^{i\theta_2} \sin \alpha & e^{-i\theta_1} \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Cette écriture fait apparaître trois angles,

$$\alpha, \quad \theta_1 = \arg(a), \quad \theta_2 = \arg(b).$$

Pour définir l'angle formé par droites droites du plan vectoriel complexe, on peut utiliser toute une classe d'isométries telles que l'image de la première droite soit la deuxième : on choisit un vecteur unitaire de la première droite, son image est l'un des vecteurs unitaires de la deuxième.

Ce qui revient à dire qu'un « angle » de deux droites complexes est défini à l'aide de deux angles réels ; l'un des trois angles, l'angle du couple de vecteurs (u, v) précédemment défini, disparaît. Si par exemple $u = (1, 0)$ est le premier vecteur de la base alors $v = (a, b)$. Quitte à remplacer v par le vecteur unitaire colinéaire $e^{-i\theta_1} v$, on peut supposer que

$$\theta_1 = \arg(a) = 0.$$

On peut aussi relier la notion d'angle entre deux vecteurs unitaires u et v à celle de l'aire du triangle Δ défini par ces vecteurs, cette aire étant

$$\text{Aire}(\Delta) = \frac{1}{2} \sin(\widehat{u, v}).$$

Pour le calcul d'aire, on vous invite à passer à la section suivante.

On remarque, en conclusion, que, dans tous les cas, on perd l'additivité des angles, comme lorsqu'on mesure des angles de dièdres dans l'espace vectoriel $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3 = \mathbb{R}^3$.

4.3.4. Aire dans le plan complexe

La notion d'aire est une notion réelle, il est difficile de lui donner un sens complexe.

On peut naturellement faire comme si le plan $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ était l'espace $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^4 = \mathbb{R}^4$. On sait alors, grâce aux « cas d'égalité des triangles », que l'aire d'un triangle Δ ne dépend que des longueurs a, b, c des trois côtés de Δ . D'après la formule de Héron d'Alexandrie, valable dans tout espace euclidien (qui découle du théorème d'Al-Kashi), on a :

$$\text{Aire}(\Delta) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4}$$

où $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ est le demi-périmètre de Δ .

Partant des coordonnées de trois points (x_A, y_A) , (x_B, y_B) , (x_C, y_C) dans un repère orthonormé du plan réel $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2 = \mathbb{R}^2$, une autre méthode de calcul de l'aire du triangle

consiste à utiliser la valeur absolue d'un produit vectoriel $\frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}|$ où

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{pmatrix}.$$

Cette formule a encore un sens pour des coordonnées complexes, en remplaçant la valeur absolue par un module. Elle caractérise les triangles plats, dont les trois sommets sont alignés, par une aire nulle.

Cela revient à dire que l'aire du triangle Δ défini par les vecteurs u et u' appartenant à $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$, tels que $u = (z_1, z_2)$ et $u' = (z'_1, z'_2)$ est

$$\text{Aire}(\Delta) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} z_1 & z'_1 \\ z_2 & z'_2 \end{pmatrix} \right|.$$

Cette formule a un avantage : elle définit une aire invariante par une isométrie vectorielle, c'est-à-dire par un endomorphisme unitaire du plan complexe muni du produit scalaire hermitien. En effet,

lorsqu'on remplace le couple (u, u') par son image $(v, v') = (\phi(u), \phi(u'))$ par l'endomorphisme ϕ , on trouve par cette formule la même aire pour les triangles isométriques définis par (u, u') et (v, v') , parce que le déterminant de ϕ a pour module 1.

Certains géomètres définissent l'aire de ce triangle Δ à partir d'une 2-forme de Kähler⁽⁹⁾

$$\text{Aire}(\Delta) = \frac{1}{2} \left| \text{Im} \left(z_1 \overline{z'_1} + z_2 \overline{z'_2} \right) \right|.$$

On peut remplacer les vecteurs $u = (z_1, z_2)$ et $u' = (z'_1, z'_2)$ de $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ par leurs images

$$\begin{aligned} v &= (az_1 - \overline{b}z_2, bz_1 + \overline{a}z_2), \\ v' &= (az'_1 - \overline{b}z'_2, bz'_1 + \overline{a}z'_2) \end{aligned}$$

par l'endomorphisme de matrice spéciale unitaire

(9) Nous remercions Sylvestre Gallot qui nous a signalé l'importance de cette définition. Nous remercions également Bernard Genevès pour son aide dans la rédaction de ce paragraphe.

$$A = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}.$$

Ici a, b sont des nombres complexes tels que

$$a\bar{a} + b\bar{b} = |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

On vérifie que :

$$\begin{aligned} & (az_1 - \bar{b}z_2)(\overline{az'_1 - \bar{b}z'_2}) + (bz_1 + \bar{a}z_2)(\overline{bz'_1 + \bar{a}z'_2}) \\ &= (a\bar{a} + b\bar{b})z_1\overline{z'_1} + 0z_1\overline{z'_2} + 0z_2\overline{z'_1} + (b\bar{b} + a\bar{a})z_2\overline{z'_2} \\ &= z_1\overline{z'_1} + z_2\overline{z'_2}. \end{aligned}$$

De même si on utilise une transformation unitaire de matrice

$$B = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\beta} \end{pmatrix},$$

on trouve

$$e^{i\alpha} z_1 e^{-i\alpha} \overline{z'_1} + e^{i\beta} z_2 e^{-i\beta} \overline{z'_2} = z_1 \overline{z'_1} + z_2 \overline{z'_2},$$

ce qui implique la conservation des aires par n'importe quelle transformation unitaire du plan complexe.

Quelques applications de cette formule pour des calculs d'aires de triangles définis par les vecteurs u et u' :

* Si $u' = ku$, k réel, alors $k z_1 \overline{z'_1} + k z_2 \overline{z'_2}$ est un réel et l'aire est nulle, les trois points du triangle sont alignés au sens réel.

* Si $u' = e^{i\theta}u$, les vecteurs u et u' sont colinéaires, donc les trois points du triangle sont alignés au sens complexe, l'aire vaut

$$\frac{1}{2} \left| \operatorname{Im} \left(e^{-i\theta} (z_1 \overline{z'_1} + z_2 \overline{z'_2}) \right) \right| = \frac{1}{2} |\sin \theta| \|u\|^2.$$

C'est donc l'aire d'un triangle isocèle dont, les côtés de même longueur mesurent $\|u\|$ et sont séparés par un angle de mesure θ . C'est la mesure qu'on obtiendrait par la première méthode avec la formule de Héron.

* Si on prend $u = (1,1)$ et $u' = (e^{i\alpha}, e^{-i\alpha})$ alors

$$\operatorname{Im}(e^{-i\alpha} + e^{i\alpha}) = 0.$$

On obtient donc une aire nulle alors que les vecteurs u et u' sont non colinéaires dès que $\alpha \neq k\pi$, k entier.

Dans tous les cas, si les points B, C, D sont alignés, ces formules ne donneront aucune relation entre les aires des triangles ABC, ACD, ABD, comme lorsqu'on mesure les aires des faces des polyèdres dans l'espace euclidien réel $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^s = \mathbb{R}^s$.

On rencontre également des obstacles similaires dès que l'on passe à un corps fini.