Annexe 2

ANNÉE 2007/2008
La plage

Par Arnauld HECQUET, Raphaël SIMONET-DAVIN,
Maxime LOUIS.
Lycées Montaigne (Bordeaux)
et Sud Médoc(Le Taillan-Médoc)
Chercheur : Robert Deville (Université Bordeaux 1)

Intro

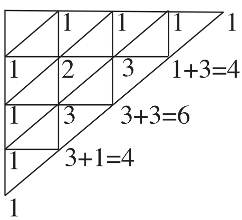
Dans une ville côtière, les rues sont toutes nord-sud ou est-ouest, et la distance entre deux carrefours voisins est toujours la même. Le front de la mer est au sud-est.
Pour aller à la plage depuis sa maison, Paul prend une pièce et à chaque carrefour tire à pile ou face. S'il obtient pile, il prend la rue vers le sud, s'il obtient face, celle vers l'est. Il arrive à la plage après n lancers. Combien de chemins possibles peut-il faire? Combien a-t-il de chances d'arriver à un endroit donné de la plage ?

La pièce de monnaie

A/ Technique de comptage :

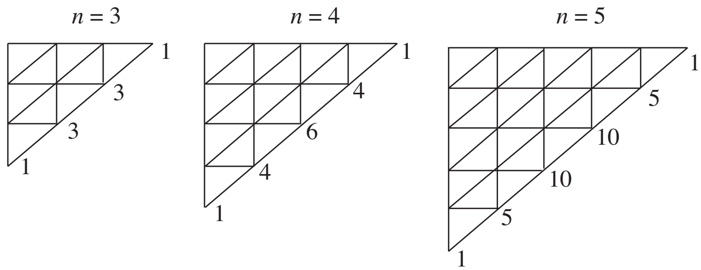
Pour trouver le nombre de chemins permettant d'arriver à un point, on ajoute les valeurs des points de la ligne précédente les plus proches.

Ex :



B/ Le nombre total de chemins :

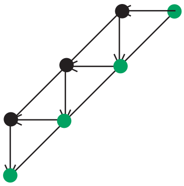
Nous nous sommes intéressés au nombre total de chemins permettant d'arriver à n'importe quel point de la plage.
Grâce à la technique de comptage expliquée précédemment, nous avons pu établir une base de données, dont voici un extrait :



Les valeurs en chiffres sont donc le nombre de chemins arrivant à chaque point de la plage. En ajoutant ces valeurs, on obtient le nombre d'itinéraires différents permettant d'arriver à un point quelconque de la plage (ce nombre est appelé ω_n).
On calcule ω_n pour chaque cas.
$n = 3 \rightarrow \omega_3 = 1 + 3 + 3 + 1 = 8$,
$n = 4 \rightarrow \omega_4 = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$,
$n = 5 \rightarrow \omega_5 = 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32$.

D'après ces résultats, nous avons conjecturé $\omega_n = 2^n$.

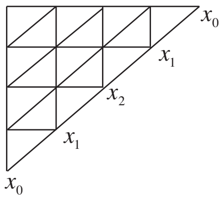
Afin de démontrer cette supposition, nous nous sommes servis du théorème de récurrence. C'est-à-dire que l'on doit prouver que, si la formule est exacte pour un quelconque rang n, elle l'est également pour le rang $n + 1$. On démontre alors l'hérédité de la formule, qui sera vraie pour tous les rangs.
Pour cela on prend deux rangs consécutifs quelconques :



On appelle n le rang « noir » et donc $n + 1$ le rang « vert ».
On voit que les chemins arrivant à chaque point noir de la première ligne (le rang « noir ») se « démultiplient » en se rendant chacun vers deux points verts de la ligne suivante (deux flèches noires partent de chaque point noir). Chaque valeur de chaque point noir est donc comptée deux fois.
La valeur totale de la première ligne ω_n est donc elle-même multipliée par 2. En admettant que la formule $\omega_n = 2^n$ est vraie pour la première ligne, on a, pour la deuxième ligne, $\omega_{n+1} = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$, donc, pour le rang n, la formule est $\omega_n = 2^n$ et, pour le rang $n + 1$, la formule est $\omega_{n+1} = 2^{n+1}$.
Donc, si la formule est vraie pour un rang, elle sera vraie pour tous les rangs suivants. C'est le théorème de récurrence.
Or, on sait que la formule $\omega_n = 2^n$ est vraie pour les rangs de 1 à 5 (voir précédemment), elle est donc vraie pour n'importe quel rang.

C/ La probabilité α_x^n

Intéressons nous maintenant à la probabilité d'arriver en un point donné de la côte.
On utilise pour cela la codification ci-contre :



- n est l'éloignement de la côte par rapport au point de départ, donc également le nombre de lancers nécessaires pour rejoindre la plage.
- x est la position du point sur la côte.

Remarque : cette codification admet un axe de symétrie qui coupe la droite symbolisant la côte en son milieu. Deux points symétriques par rapport à cette droite ont même codification et même formule de probabilité (α_x^n).

Nous avons établi une première base de données nous donnant le nombre de chemins arrivant à chaque point de $n = 1$ à $n = 20$ grâce à la technique de comptage vue précédemment.

Nous nous sommes d'abord intéressés au cas $x = 0$ (c'est-à-dire les points aux extrémités de la côte). Et nous nous sommes aperçus que pour $x = 0$ et pour n'importe quel n, on a $\alpha_x^n = \alpha_0^n = 1$. Nous en avons donc conjecturé la propriété suivante : $\alpha_0^n = 1$.

Puis nous nous sommes intéressés au cas $x = 1$ et nous avons remarqué que :

- pour $n = 4$, $\alpha_x^n = \alpha_1^4 = 4$,
- pour $n = 5$, $\alpha_1^5 = 5$,
- pour $n = 6$, $\alpha_1^6 = 6$.

Nous en avons donc conjecturé $\alpha_1^n = n$.

Nous nous sommes ensuite intéressés au cas $x = 2$ et nous avons remarqué que :

- pour $n = 4$, $\alpha_x^n = \alpha_2^4 = 6$,
- pour $n = 5$, $\alpha_2^5 = 10$,
- pour $n = 6$, $\alpha_2^6 = 15$.

Nous en avons donc conjecturé $\alpha_2^n = n\left(\dfrac{n-1}{2}\right)$.

Récapitulons :

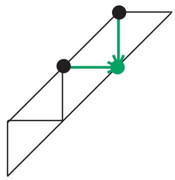
- $\alpha_0^n = 1$,
- $\alpha_1^n = n$
- $\alpha_2^n = n\left(\dfrac{n-1}{2}\right)$,

– $\alpha_3^n = n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)$.

Nous avons déduit de ces propriétés la formule générale suivante :

$$\alpha_x^n = n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\times\ldots\times\left(\frac{n-(x-1)}{x}\right).$$

Nous avons ensuite cherché à démontrer cette formule, pour cela nous nous sommes à nouveau servis du théorème de récurrence utilisé pour oméga :



En fixant un n et un x quelconque, on code α_x^n le nombre de chemins pour arriver au point repéré (n,x). On codera donc α_{x+1}^n le nombre de chemins qui arrivent sur le même rang (même n) mais un cran en dessous, et α_{x+1}^{n+1} le nombre de chemins qui arrivent, toujours un cran en dessous du premier point, mais cette fois sur le rang suivant.

Afin de démontrer l'hérédité de la formule, nous avons voulu comparer la somme des formules correspondant aux deux points du rang n (points noirs) et la formule correspondant au point du rang $n + 1$ (point vert).

Calculons donc la somme $\alpha_x^n + \alpha_{x+1}^n$:

On remplace chaque codification par sa formule respective.

$$\begin{aligned}\alpha_x^n + \alpha_{x+1}^n = {} & n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\times\ldots\times\left(\frac{n-(x-1)}{x}\right) \\ & +n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\times\ldots\times\left(\frac{n-(x-1)}{x}\right)\times\left(\frac{n-x}{x+1}\right).\end{aligned}$$

Remarque : Ces deux formules sont similaires, mais la seconde comporte un facteur supplémentaire (du fait du $x + 1$).

Les deux termes de la somme sont factorisables (crochets).

$$\begin{aligned}\alpha_x^n + \alpha_{x+1}^n = {} & \underbrace{n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\times\ldots\times\left(\frac{n-(x-1)}{x}\right)} \\ & +\overbrace{n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\times\ldots\times\left(\frac{n-(x-1)}{x}\right)}\times\left(\frac{n-x}{x+1}\right).\end{aligned}$$

On obtient le produit suivant (sous le crochet la partie factorisée) :

$$\alpha_x^n + \alpha_{x+1}^n = n\overbrace{\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\times\ldots\times\left(\frac{n-(x-1)}{x}\right)}\times\left\{1+\left(\frac{n-x}{x+1}\right)\right\}.$$

On simplifie le second facteur entre les accolades.

$$\alpha_x^n + \alpha_{x+1}^n = n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\times\ldots\times\left(\frac{n-(x-1)}{x}\right)\times\left\{\frac{n+1}{x+1}\right\}.$$

On écrit ce produit sous forme de fraction. On obtient une suite de facteurs décroissante allant de $n + 1$ à $n - x + 1$ au numérateur, ainsi qu'une factorielle de $x - 1$ au dénominateur (le $n + 1$ au numérateur à été replacé au début de la suite ; et le 1 censé commencer la factorielle est « oublié » puisqu'il ne modifie pas le résultat, même s'il est présent : n peut également s'écrire $\frac{n}{1}$).

$$\alpha_x^n + \alpha_{x+1}^n = \frac{\prod_{k=n-x+1}^{n+1} k}{(x+1)!} = \alpha_{x+1}^{n+1}.$$

C'est bien la formule que l'on obtiendrait en remplaçant n par $n + 1$ et x par $x + 1$ dans la formule conjecturée pour α_x^n.

Cela montre donc que si la formule α_x^n est vraie pour tous les points d'un rang, elle sera vraie pour tous les points de tous les rangs suivants. Or on sait par le calcul que cette formule est vraie pour tous les points des premiers rangs.
Cette formule permet donc de calculer rapidement le nombre d'itinéraires différents menant à un point donné de la plage, et ce quel que soit l'éloignement n de la plage et la position x du point sur la côte.

Pour calculer la probabilité d'arriver à un point donné de la plage, il suffit de calculer le nombre de chemins menant à ce point sur le nombre total de chemins menant à la plage. Ce calcul est donc : $\frac{\alpha_x^n}{2^n}$.

Généralisation : α_x^n et le facteur probabilité

Nous nous sommes intéressés à deux cas :
– En prenant un dé, on décide d'aller vers l'Est lorsqu'on fait un 1, et vers le Sud lorsqu' on fait un 2, un 3, un 4, un 5 ou un 6. La probabilité est donc d'une chance sur six d'aller vers l'Est et de cinq chances sur six d'aller vers le Sud.
– Toujours avec un dé, on décide d'aller vers l'Est lorsqu'on fait un 1 ou un 2, et vers le Sud lorsqu' on fait un 3, un 4, un 5 ou un 6. La probabilité est donc d'une chance sur trois d'aller vers l'Est et de deux chances sur trois d'aller vers le Sud.

Attention ! Pour chacun de ces cas la technique de comptage est légèrement différente :

Pour le cas $\frac{1}{6};\frac{5}{6}$ on multipliera la valeur du point par 1 lorsqu'on ira vers l'Est mais par 5 lorsqu'on ira vers le Sud.

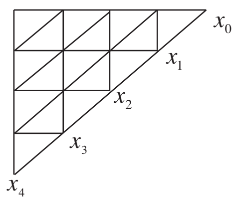
Pour le cas $\frac{1}{3};\frac{2}{3}$ on multipliera la valeur du point par 1 lorsqu'on ira vers l'Est mais par 2 lorsqu'on ira vers le Sud.

La valeur de ω se complique également. On doit alors distinguer deux choses : le nombre d'itinéraires différents menant à la plage, qui reste 2^n, et le nombre de « suites de dés » différentes menant à la plage, qui lui sera y^n, y étant la somme des chances d'aller à l'Est et au Sud (c'est-à-dire le dénominateur de chacune des deux fractions), qui sera la valeur de ω_n. Pour chaque cas on aura respectivement $\omega_n = 6^n$ et $\omega_n = 3^n$.
Ex : dans le premier cas : On prend $n = 4$. Si je tire au dé et que j'obtiens 1-2-3-4, si je tire une seconde fois et que j'obtiens 1-6-6-6, je parviendrai au même point, en ayant pris le même itinéraire, mais j'ai deux suites de dés différentes.

Il reste un problème : il n'y a a priori aucune différence entre le cas $\frac{1}{3};\frac{2}{3}$ et le cas $\frac{1}{6};\frac{5}{6}$; alors pourquoi dans un cas sera-t-il beaucoup plus grand ? Tout simplement parce que, si dans un cas ω_n est multiplié par 2, α_x^n l'est aussi : en effet, la valeur de chaque chemin sera deux fois plus grande à chaque déplacement d'un carrefour à un autre, donc au final les valeurs à chaque point de la côte seront également deux fois plus grandes. Au final la formule gardera la même valeur puisque $\frac{\alpha_x^n}{\omega}$ pourra se simplifier par 2.

Intéressons nous maintenant à α_x^n : afin de déterminer l'impact de la probabilité de départ sur la formule α_x^n, nous avons établi une mini base de données pour un n donné.

Remarque : Après calcul, nous avons du revoir notre système de codification puisque la répartition des chemins n'était plus du tout symétrique. Nous avons donc utilisé la codification suivante :



Nous aurions pu d'ailleurs utiliser cette codification lors du premier chapitre en admettant que $\alpha_x^n = \alpha_{n-x}^n$.

Après avoir calculé le nombre de suites de dés arrivant en chaque point pour un n donné, nous avons multiplié chacun de ces résultats par la valeur que prend α_x^n pour le même point (même n et même x) mais dans la probabilité $\frac{1}{2};\frac{1}{2}$.

Suite à cette multiplication, nous avons obtenu un nombre différent pour chaque opération. Puis nous avons traduit ce nombre à l'aide de n et de x afin de généraliser ce facteur supplémentaire.

D'après ces résultats, nous avons donc pu déduire en quelque sorte une « nouvelle formule » pour chaque probabilité de départ :

- Pour $\frac{1}{2};\frac{1}{2}$, la formule est donc α_x^n.
- Pour $\frac{1}{6};\frac{5}{6}$, la formule est $\alpha_x^n \times 5^{n-x}$.
- Pour $\frac{1}{3};\frac{2}{3}$, la formule est $\alpha_x^n \times 2^{n-x}$.

Nous avons ensuite cherché à trouver le lien entre le facteur supplémentaire et la probabilité de départ. En admettant que, pour la formule α_x^n dans le cas $\frac{1}{2};\frac{1}{2}$, le facteur supplémentaire sois 1^{n-x} (qui est toujours égal à 1 et donc ne modifie en rien le résultat, nous avons donc codifié les « cas » de la manière suivante :

Nous avons $\frac{p}{y}$ chance d'aller vers l'Est et $1-\frac{p}{y}$ chance d'aller vers le Sud ($1-\frac{p}{y}$ peut aussi s'écrire $\frac{y-p}{p}$).

En se servant de cette codification, nous sommes arrivés à écrire sous forme littérale les facteurs venant modifier la formule $\alpha_x^n \times p^{n-x}(1-p)^x$.

Nous avons donc finalement établi une forme plus générale :

$$\boxed{\frac{\alpha_x^n \times p^{n-x}(y-p)^x}{y^n}.}$$

Cette formule permet, dans la configuration de la plage, de calculer la probabilité d'arriver en un point précis de cette plage quel que soit l'éloignement de départ, le point de la plage et la probabilité que nous choisissons pour déterminer nos chances d'aller à l'Est ou au Sud.