

Annexe « expérimentale », par Marc Roux

Il est plus commode et plus concret d'expérimenter sur le problème de départ (Π_1) : étant donné un disque $\mathcal{D}$ de rayon r , (de centre Ω), pour chaque entier positif n , maximiser le réel positif r tel que $\mathcal{D}$ contienne n disques de rayon r , sans chevauchement. Le rayon des tartelettes est ici nommé r parce que GeoGebra réserve les lettres x et y aux coordonnées de points ou de vecteurs. Comme dans le texte de l'article, R désigne le rayon du plus petit disque contenant les centres des tartelettes : $R = \rho - r$.

La méthode la plus élémentaire pour réaliser cette expérimentation est tout à fait à la portée d'élèves de lycée ; elle est un peu rustique, artisanale :

Avec Geogebra⁽⁵⁾

- On crée un curseur ρ , et un curseur r , à valeurs positives.
- On crée un point Ω et un cercle de centre Ω , rayon ρ , qui représentera le plat.
- On crée l'un après l'autre des points libres A, B, C, ... et les cercles de centres ces points et de rayon r (les tartelettes).
- On déplace les points à la souris, de façon à amener le plus possible de tartelettes dans le plat, sans chevauchement.

Avec Cabri II+

On crée sans plus de difficulté l'équivalent de la première construction :

- On crée un point A sur l'axe (Ox), et sa distance à l'origine O.
- Avec l'outil Compas, on crée à volonté des cercles ayant pour centres des points libres, de rayon d(O,A).
- On crée le grand cercle représentant le plat, de centre l'origine, passant par un point B de (Ox)
- On règle à volonté les rayons r et ρ en déplaçant A et B
- On essaie d'amener le plus possible de tartelettes dans le plat, sans chevauchement.

Ces expérimentations donnent à penser que, au moins pour les valeurs de n pas trop grandes, une disposition optimale (c'est-à-dire maximisant r pour ρ et n donnés) est obtenue en plaçant les centres de p disques ($p \leq n$, p aussi grand que possible) aux sommets d'un p -gone régulier, inscrit dans le cercle de centre Ω , de rayon $R = \rho - r$, les $k = n - p$ disques restants étant dans la partie restante de $\mathcal{D}$. Dans ce cas, le rayon

des disques est $r = R \sin(\pi / p)$ (soit $r = \rho \frac{\sin(\pi / p)}{1 + \sin(\pi / p)}$).

Les élèves peuvent, je pense, réaliser la figure correspondante :

(5) GeoGebra est un logiciel libre et gratuit, à télécharger à l'adresse : <http://www.geogebra.org/cms/>

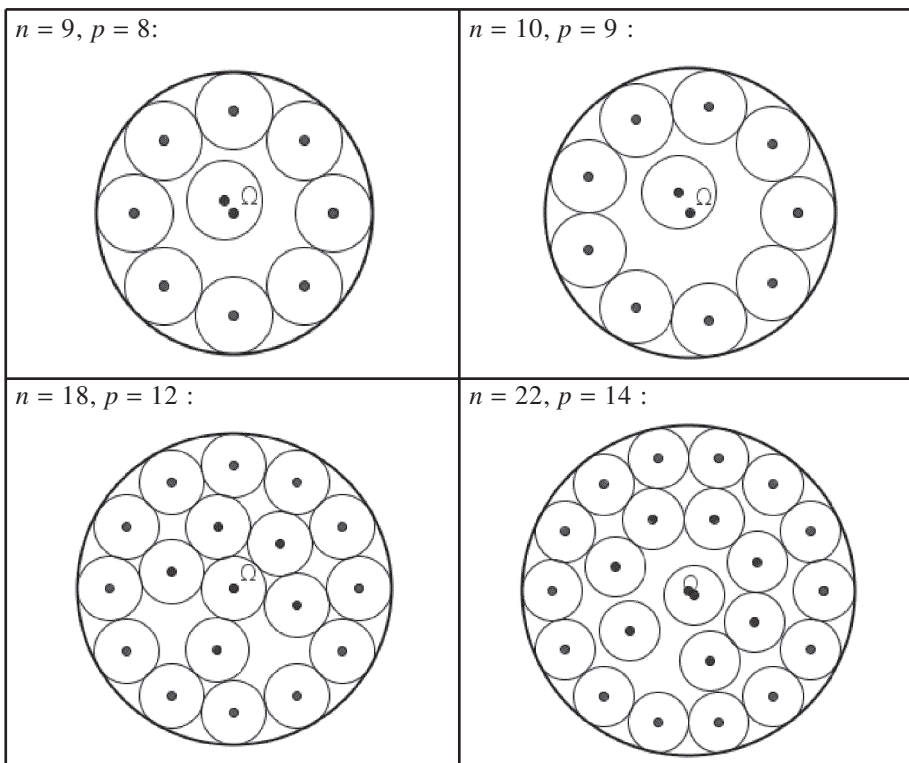
Avec Geogebra

- Créer un curseur p à valeurs entières strictement positives.
- Créer les p centres des tartelettes par la commande :
$$\text{Séquence}[(1; 2 * 3.14159 \text{ i} / p), i, 0, p]$$
(le rayon R est ici pris pour unité ; les coordonnées séparées par un point-virgule sont, pour GéoGebra, des coordonnées polaires).
- Créer le nombre : $r=0.5$ Distance[Elément[list1, 1], Elément[list1, 2]].
- Créer les p cercles périphériques par la commande :
$$\text{Séquence}[\text{Cercle}[\text{Elément}[\text{list1}, i], r], i, 0, p]$$
- Créer le cercle de centre O , de rayon $1 + r$.
- Une valeur de p étant choisie, créer enfin, un par un, des points libres et des cercles de centres ces points, de rayon r , tant qu'il en entre dans le grand disque.

Avec Cabri

On peut de même créer un polygone régulier, le milieu d'un côté, la distance r de ce milieu à une extrémité, et avec l'outil Compas, les cercles de centres les sommets du polygone, et d'autres de centres libres, tous de rayon r ; sans oublier le grand cercle de rayon ρ ; je n'ai pas vu de moyen de changer le nombre de côtés du polygone sans refaire toute la figure ; mais je ne suis pas spécialiste de Cabri...

Illustration de quelques cas :



Les valeurs observées de p , k , R/r pour n allant de 8 à 22 sont données par le tableau suivant:

n	p	k	r/R
8	7	1	0,43
9	8	1	0,38
10	9	1	0,34
11	10	1	0,31
12	10	2	0,31
13	10	3	0,31
14	11	3	0,28
15	11	4	0,28
16	12	4	0,26
17	12	5	0,26
18	12	6	0,26
19	12	7	0,26
20	13	7	0,24
21	14	7	0,22
22	14	8	0,22

Remarques :

- Dès que le plat est assez grand pour 6 tartelettes, il peut en contenir 7.
- Dès qu'il en contient 11, il peut en contenir 13.
- Dès qu'il en contient 14, il peut en contenir 15.
- Dès qu'il en contient 16, il peut en contenir 19.
- Dès qu'il en contient 21, il peut en contenir 22.

Je ne vois aucune régularité dans ces « sauts » ; cette expérimentation permet donc seulement de se faire une idée de ce qui se passe pour les premières valeurs de n , mais non d'émettre des conjectures concernant le problème général.