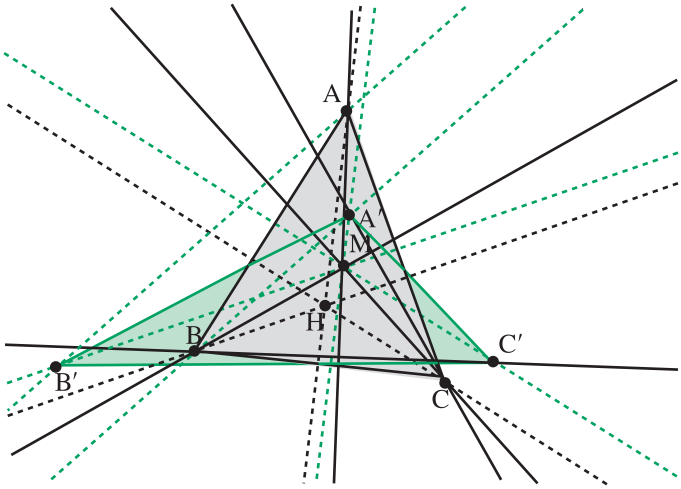
Annexe 1 : la démonstration

Soit un triangle ABC non rectangle et M un point quelconque;
On note A′, B′ et C′ les orthocentres respectifs des triangles MBC, MCA et MAB.
Alors les triangles ABC et A′B′C′ ont la même aire.



La démonstration ci-dessous sera faite en partie de façon analytique.

Soit un repère orthonormé $\left(\mathrm{M}\,;\vec{i},\vec{j}\right)$. Soit $\mathrm{A}\left(a_1,a_2\right)$, $\mathrm{B}\left(b_1,b_2\right)$, $\mathrm{C}\left(c_1,c_2\right)$ trois points quelconques du plan.

L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\right|$.

Or $\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)=\det\left(\overrightarrow{\mathrm{MB}}-\overrightarrow{\mathrm{MA}},\overrightarrow{\mathrm{MC}}-\overrightarrow{\mathrm{MA}}\right)$.

Compte tenu de la bilinéarité du déterminant, on a :

$$\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)=\det\left(\overrightarrow{\mathrm{MB}},\overrightarrow{\mathrm{MC}}\right)-\det\left(\overrightarrow{\mathrm{MB}},\overrightarrow{\mathrm{MA}}\right)-\det\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}},\overrightarrow{\mathrm{MC}}\right)+\det\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}},\overrightarrow{\mathrm{MA}}\right).$$

Et en utilisant le fait qu'il s'agit d'une forme bilinéaire antisymétrique, on a :

$$\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)=\det\left(\overrightarrow{\mathrm{MB}},\overrightarrow{\mathrm{MC}}\right)+\det\left(\overrightarrow{\mathrm{MC}},\overrightarrow{\mathrm{MA}}\right)+\det\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}},\overrightarrow{\mathrm{MB}}\right).$$

Le point C′, orthocentre du triangle MAB est donc le point d'intersection de la hauteur issue de A relative à (MB) et de la hauteur issue de B relative à (MA). Pour déterminer ses coordonnées, il suffit donc d'écrire $\overrightarrow{\mathrm{AC'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MB}}=0$ et $\overrightarrow{\mathrm{BC'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MA}}=0$, puis de résoudre le système formé par ces deux équations. Après calculs :

$$\overrightarrow{\mathrm{MC'}}=\frac{a_2b_2+a_1b_1}{a_1b_2-a_2b_1}\begin{pmatrix} b_2-a_2 \\ -(b_1-a_1)\end{pmatrix}.$$

Et de façon analogue, on a :

$$\overrightarrow{\mathrm{MB}'} = \frac{c_2a_2 + c_1a_1}{c_1a_2 - c_2a_1}\begin{pmatrix} a_2 - c_2 \\ -(a_1 - c_1) \end{pmatrix}. \quad \overrightarrow{\mathrm{MA}'} = \frac{b_2c_2 + b_1c_1}{b_1c_2 - b_2c_1}\begin{pmatrix} c_2 - b_2 \\ -(c_1 - b_1) \end{pmatrix}.$$

De façon analogue à ce qui a été calculé auparavant,

$$\det\left(\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}, \overrightarrow{\mathrm{A'C'}}\right) = \det\left(\overrightarrow{\mathrm{MB'}}, \overrightarrow{\mathrm{MC'}}\right) + \det\left(\overrightarrow{\mathrm{MC'}}, \overrightarrow{\mathrm{MA'}}\right) + \det\left(\overrightarrow{\mathrm{MA'}}, \overrightarrow{\mathrm{MB'}}\right).$$

Calculons chacun de ces trois déterminants.

$$\det\left(\overrightarrow{\mathrm{MB'}}, \overrightarrow{\mathrm{MC'}}\right) = \frac{c_2a_2 + c_1a_1}{c_1a_2 - c_2a_1} \times \frac{a_2b_2 + a_1b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\begin{vmatrix} a_2 - c_2 & b_2 - a_2 \\ -(a_1 - c_1) & -(b_1 - a_1) \end{vmatrix}.$$

Les règles de calculs sur les déterminants permettent d'écrire successivement :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_2 - c_2 & b_2 - a_2 \\ -(a_1 - c_1) & -(b_1 - a_1) \end{vmatrix} &= -\begin{vmatrix} a_2 - c_2 & b_2 - a_2 \\ a_1 - c_1 & b_1 - a_1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 - c_1 & b_1 - a_1 \\ a_2 - c_2 & b_2 - a_2 \end{vmatrix} = \det\left(\overrightarrow{\mathrm{CA}}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) = \det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right). \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$a_2b_2 + a_1b_1 = \overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MB}} = \mathrm{MA} \times \mathrm{MB}\cos\left(\widehat{\mathrm{C}}\right)$$

et

$$a_1b_2 - a_2b_1 = \mathrm{MA} \times \mathrm{MB}\sin\left(\widehat{\mathrm{C}}\right).$$

Alors

$$\frac{a_2b_2 + a_1b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{\mathrm{MA} \times \mathrm{MB}\cos\left(\widehat{\mathrm{C}}\right)}{\mathrm{MA} \times \mathrm{MB}\sin\left(\widehat{\mathrm{C}}\right)} = \frac{1}{\tan\left(\widehat{\mathrm{C}}\right)}.$$

De même

$$\frac{c_2a_2 + c_1a_1}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{\tan\left(\widehat{\mathrm{B}}\right)}.$$

On peut donc écrire :

$$\det\left(\overrightarrow{\mathrm{MB'}}, \overrightarrow{\mathrm{MC'}}\right) = \frac{1}{\tan\left(\widehat{\mathrm{B}}\right)} \times \frac{1}{\tan\left(\widehat{\mathrm{C}}\right)} \times \det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right).$$

On obtient des expressions analogues pour les autres déterminants, ce qui permet d'écrire :

$$\det\left(\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}, \overrightarrow{\mathrm{A'C'}}\right) = \left(\frac{1}{\tan\left(\widehat{\mathrm{B}}\right)} \times \frac{1}{\tan\left(\widehat{\mathrm{C}}\right)} + \frac{1}{\tan\left(\widehat{\mathrm{C}}\right)} \times \frac{1}{\tan\left(\widehat{\mathrm{A}}\right)} + \frac{1}{\tan\left(\widehat{\mathrm{A}}\right)} \times \frac{1}{\tan\left(\widehat{\mathrm{B}}\right)}\right)\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right).$$

On réduit au même dénominateur :

$$\det\left(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}\right)=\frac{\tan\left(\widehat{A}\right)+\tan\left(\widehat{B}\right)+\tan\left(\widehat{C}\right)}{\tan\left(\widehat{A}\right)\times\tan\left(\widehat{B}\right)\times\tan\left(\widehat{C}\right)}\times\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right).$$

Or c'est un résultat classique, donc bien connu, que, pour les trois angles d'un triangle non rectangle, $\dfrac{\tan\left(\widehat{A}\right)+\tan\left(\widehat{B}\right)+\tan\left(\widehat{C}\right)}{\tan\left(\widehat{A}\right)\times\tan\left(\widehat{B}\right)\times\tan\left(\widehat{C}\right)}=1$.

L'égalité des déterminants entraîne l'égalité des aires des triangles ABC et A′B′C′.

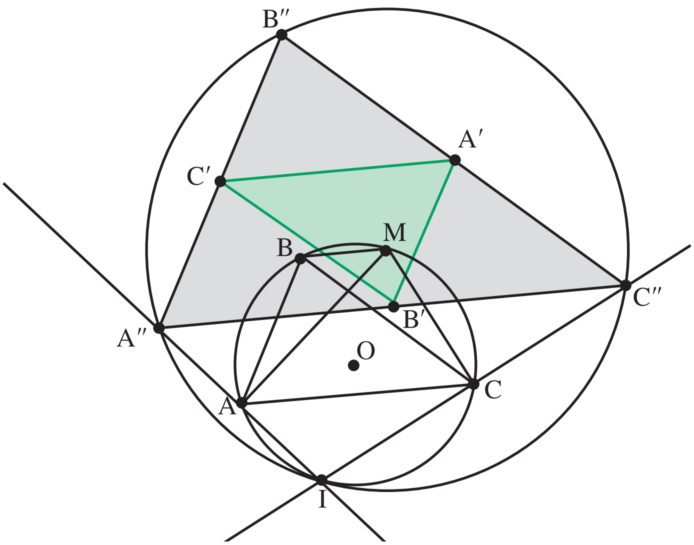
Lorsque le triangle ABC est rectangle, par exemple en A, alors tous les termes où apparaît $\cos\left(\widehat{A}\right)$ sont nuls et la relation s'écrit alors

$$\det\left(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}\right)=\frac{1}{\tan\left(\widehat{B}\right)}\times\frac{1}{\tan\left(\widehat{C}\right)}\times\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right).$$

Mais alors $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont complémentaires et $\dfrac{1}{\tan\left(\widehat{B}\right)}\times\dfrac{1}{\tan\left(\widehat{C}\right)}=1$.

La propriété est encore vraie dans le cas où ABC est un triangle rectangle.

ANNEXE 2.
Cas particulier où le point M est sur le cercle circonscrit à ABC



Soit O le centre du cercle circonscrit à ABC, M un point de ce cercle et I son symétrique par rapport à O.

Soit A″, B″ et C″ les images respectives de A, B et C dans l'homothétie de centre I et de rapport 2.
Soit c, b et a les milieux respectifs des segments [A″B″], [C″A″] et [B″C″].
On va montrer que c, b et a sont les orthocentres des triangles MAB, MCA et MBC.
Par construction B est le milieu de [IB″].
Par suite le théorème des milieux dans le triangle IA″B″ permet de dire que (cB) est parallèle à (A″I).
Puisque [MI] est un diamètre du cercle circonscrit à ABC, (MA) est perpendiculaire à (AI), d'où l'on déduit que (MA) est perpendiculaire à (cB).
De façon analogue, on a (MB) perpendiculaire à (cA).
Par suite le point c est l'orthocentre du triangle MAB. Autrement dit c est égal à C′.
On montre de même que a = A′ et b = B′.
On sait que le triangle formé par les milieux des cotés d'un triangle est l'image de ce triangle par une homothétie de rapport $-\frac{1}{2}$ ayant pour centre le centre de gravité du triangle.
Par conséquent le triangle A′B′C′ est l'image du triangle ABC par la composée de deux homothéties dont le produit des rapports est −1, c'est-à-dire une symétrie centrale.
A′B′C′ est donc isométrique à ABC.
Remarque : le point M est l'orthocentre du triangle A′B′C′.

ANNEXE 3. Démonstration de la « propriété de Rivoallan » – Variante

1. L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right|$ et celle du triangle A′B′C′ est égale à $\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}\right)\right|$.

Il suffit donc de montrer que $\det\left(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}\right)=\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.

2. Remarquons d'abord que, A′ étant l'orthocentre de MBC, on a (CA′) ⊥ (MB) et, C′ étant orthocentre de MAB, on a (AC′) ⊥ (MB) ; d'où (AC′) // (A′C).
De même (AB′) // (A′B) et (BC′) // (B′C).

On en déduit que les déterminants $\det\left(\overrightarrow{AC'},\overrightarrow{A'C}\right)$, $\det\left(\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{A'B}\right)$, $\det\left(\overrightarrow{BC'},\overrightarrow{B'C}\right)$ sont tous nuls.

3. $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\det\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}\right)+\det\left(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MA}\right)+\det\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)$
(démonstration : voir Rivoallan) ; de même :
$\det\left(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}\right)=\det\left(\overrightarrow{MB'},\overrightarrow{MC'}\right)+\det\left(\overrightarrow{MC'},\overrightarrow{MA'}\right)+\det\left(\overrightarrow{MA'},\overrightarrow{MB'}\right)$.

On décompose les vecteurs de façon à faire apparaître les déterminants nuls vus en 2 :

$$\det\left(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}\right)=\det\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CB'},\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC'}\right)$$
$$+\det\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC'},\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CA'}\right)+\det\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB'}\right)$$

On « développe » :

$$\begin{aligned}
\det\left(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}\right) &= \det\left(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MB}\right)+\det\left(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{BC'}\right)+\det\left(\overrightarrow{CB'},\overrightarrow{MB}\right)+\det\left(\overrightarrow{CB'},\overrightarrow{BC'}\right)\\
&\quad+\det\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MC}\right)+\det\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{CA'}\right)+\det\left(\overrightarrow{AC'},\overrightarrow{MC}\right)+\det\left(\overrightarrow{AC'},\overrightarrow{CA'}\right)\\
&\quad+\det\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}\right)+\det\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{AB'}\right)+\det\left(\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{MA}\right)+\det\left(\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{AB'}\right)\\
&= \det\left(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MB}\right)+\det\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MC}\right)+\det\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}\right)\\
&\quad+\det\left(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{BC'}\right)-\det\left(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{AC'}\right)+\det\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{CA'}\right)-\det\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{BA'}\right)\\
&\quad+\det\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{AB'}\right)-\det\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{CB'}\right)+0+0+0\\
&= -\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)+\det\left(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{BA}\right)+\det\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{CB}\right)+\det\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{AC}\right)\\
&= -\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)+\det\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}\right)\\
&\quad+\det\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{CB}\right)+\det\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\\
&= -\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)+\det\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)\\
&\quad+\det\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}\right)+\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\\
&= -\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)+0+2\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\\
&= \det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right).
\end{aligned}$$

ANNEXE 4 : quelques conjectures à démontrer...

Plusieurs conjectures sont apparues à propos de la configuration suivante :

Soit un triangle ABC et un point M non situé sur les droites (AB), (BC) et (CA). On considère A′, B′ et C′ les centres des cercles circonscrits respectivement à MBC, MCA et MAB . On note ϕ la fonction $M \mapsto \dfrac{\text{aire}(A'B'C')}{\text{aire}(ABC)}$. On démontre que lorsque M est l'orthocentre de ABC, alors $\phi(M) = 1$ et que si M appartient au cercle circonscrit de ABC alors $\phi(M) = 0$.

1. Mais il semblerait que si le point M est à l'intérieur de ABC, alors $\phi(M) \geq 1$
Quel est l'ensemble des points M situés à l'intérieur de ABC lorsque ϕ est minimale ? Il semblerait que lorsque ABC est acutangle que cet ensemble soit réduit à l'orthocentre de ABC.

2. Quel est l'ensemble des points M tels que $\phi(M) = 1$?