Solutions, Problèmes d'antan n° 1

Georges LION

Exercice n° 1

1. **Les points** A **et** A′ **sont diamétralement opposés sur le cercle** (O)**.**

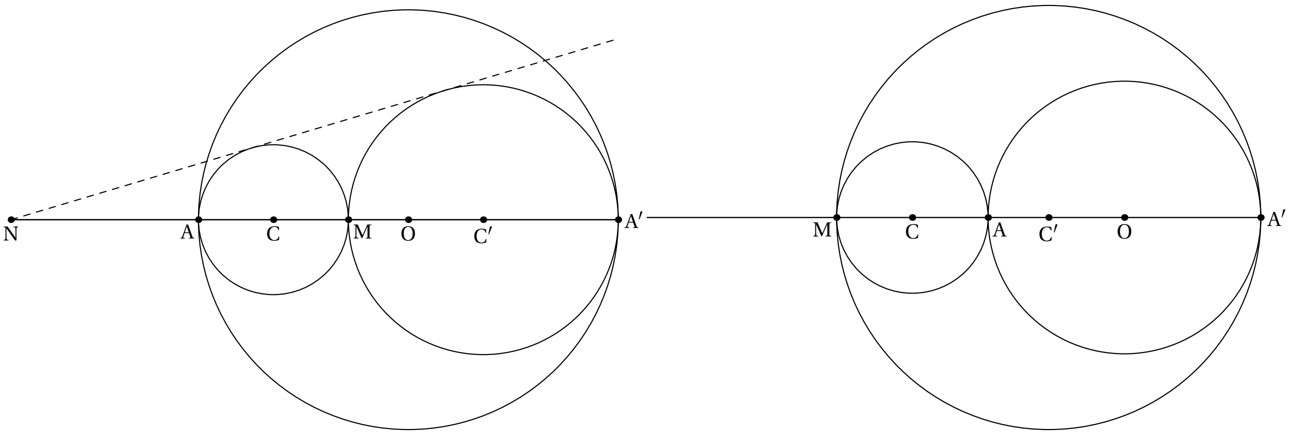
   Il est immédiat que le point M et l'autre centre d'homothétie de (C) et (C′) appartient à la droite (AA′). Plus précisément :
   - Si (C) et (C′) sont tangents extérieurement entre eux et intérieurement à (O), alors M ∈]AA′[(centre d'homothétie négatif) et N ∉ [AA′] (centre d'homothétie positive).
   - Si, par exemple, (C) est tangent extérieurement à (O), lui-même tangent intérieurement à (C′), alors M (centre d'homothétie positive) est hors [AA′] ainsi que N, centre d'homothétie négative qui envoie A en M et M en A′.

   Réciproquement, la donnée sur (AA′) de M distinct de A et A′, permet de construire (C) et (C′) répondant aux conditions.

   Enfin, si N est sur (AA′) hors de [AA′], la relation $\frac{MN}{NA} = \frac{NA'}{NM}$, c'est-à-dire $NA \times NA' = NM^2$ détermine deux positions possibles pour M, à savoir $M_1 \in [AA']$ et M_2 de l'autre côté de de N et (C_2) et (C'_2) tangents intérieurement en M_2.

   Le rapport $\frac{\overline{NM_1}}{\overline{NA}} = \frac{\overline{NA'}}{\overline{NM_1}}$ est positif (respectivement négatif pour M_2). N est donc centre de l'homothétie positive de (C_1) sur (C'_1) (resp. négative de (C_2) sur C'_2).

   En résumé,
   - le lieu de M est]AA′[(avec des cercles tangents extérieurement) « *union* » (AA′) − [AA′] (avec des cercles tangents intérieurement).
   - le lieu de N est (AA′) − [AA′] et chaque point N est à la fois centre d'homothétie positive pour deux cercles tangents extérieurement et négative pour deux cercles tangents intérieurement.



2. **Les points** A **et** A′ **ne sont pas diamétralement opposés sur** (O)**.**

   Les tangentes à (O) en A et A′ se coupent en Ω puis recoupent en B et B′ le cercle de centre Ω passant par A et A′. Les tangentes à Ω en B et B′ coupent la droite (AA′) en D et D′ respectivement.

   Les tangentes en M, A et A′, c'est-à-dire les axes radicaux de (C), (C′) et (O) pris deux à deux se coupent en Ω. Donc M appartient au ercle (Ω).

   Pour aller plus loin, distinguons trois cas :

   (a) $M_1 \in \widehat{AA'}$ et c'est le centre d'homothérie négatif de (C) et (C′) tangents extérieurement entre eux et intérieurement à (O). Lorsque $M_1A \neq M_1A'$, la droite (CC′) coupe (AA′) en un point N, hors de [AA′], pôle d'une inversion de puissance positive, préservant (O) et échangeant A et A′, donc (C) et (C′). N est donc le centre d'homothétie positive amenant (C) sur (C′).

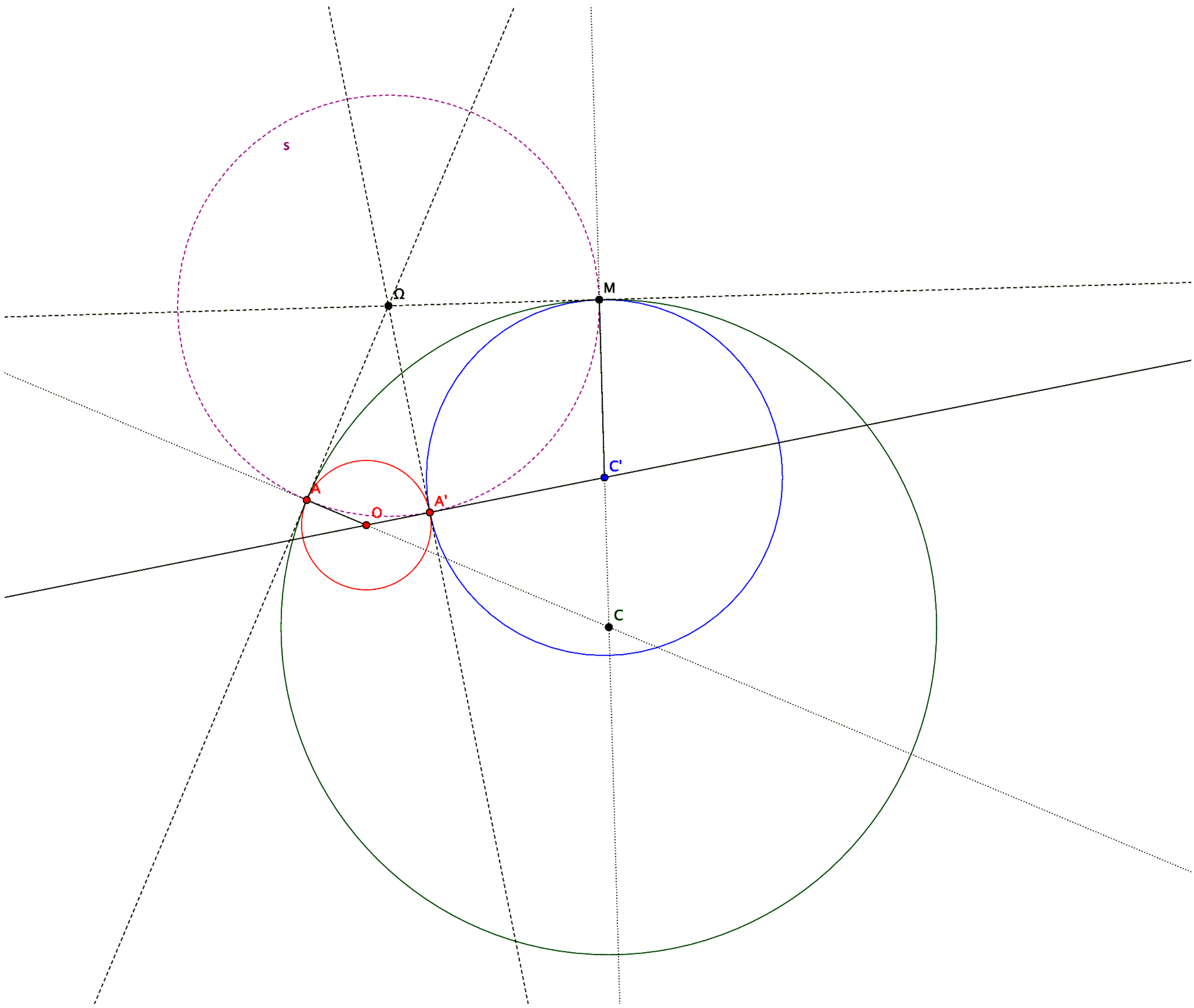
(b) $M_1 \in \widehat{AB} \cup \widehat{A'B'}$. Par symétrie par rapport à la médiatrice de $[AA']$, on choisit par exemple $M \in \widehat{AB}$ (ouvert) ; la tangente en M à (Ω) coupe (OA) en C_1 et (OA′) en C'_1 — (C_1) et (C'_1) sont tangents intérieurement, M est leur centre d'homothétie positive. Par ailleurs, $(C_1C'_1)$ coupe (AA') en $N \in]AD[$. Comme expliqué ci-dessus, N est pôle d'inversion donc centre d'homothétie négative de (C_1) et (C'_1).

(c) $M_1 \in \widehat{BB'}$ (ouvert) et c'est le centre d'homothétie négative de (C_1) et $(C'_1$ tangents extérieurement situés de part et d'autre de (ΩM_1). M_1 est centre d'homothétie négative et si $M_1A \neq M_1A'$, $(C_1C'_1)$ coupe (AA') en N hors de $[DD']$. Comme ci-dessus, N est le centre de l'homothétie positive de (C) et (C′).

Réciproquement, la donnée de $N \in (AA') - [AA']$ permet de construire M_1 et M_2 rentrant dans le cadre de (a), (b) et (c) et un seul M pour $N = D$ ou D'.

En résumé, le lieu de M est $\widehat{AB} \cup \widehat{A'B'}$ pour C et C′ tangents intérieurement et $\widehat{AA'} \cup \widehat{BB'}$ pour C et C′ tangents extérieurement.

Le lieu de N est $(AA') -]DD'[$ comme centre d'homothétie positive de (C) et (C′), $]AD[\cup]A'D'[$ comme centre de deux homothéties de signes différents pour (C_1, C'_1) et (C_2, C'_2).



Le fichier `antan1_1_GL.ggb`, ouvert avec GeoGebra, permet de suivre la solution de Georges Lion