Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs, montres connectées et tous appareils électroniques de communication ou de stockage, ainsi que les documents sont interdits.

La qualité de la rédaction est un facteur important d'appréciation des copies. Les candidats sont donc invités à produire des raisonnements clairs, complets et concis.

Les candidats peuvent utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes, en veillant dans ce cas à préciser la référence du résultat utilisé.

Rappels et notations

L'un des objectifs du problème est de déterminer, pour tout entier $p \geqslant 2$, les nombres qui sont la somme finie d'inverses de puissances p-ièmes d'entiers naturels distincts.
Par exemple, pour $p = 2$, on établira qu'un nombre rationnel x peut s'écrire comme somme finie d'inverses de carrés d'entiers naturels distincts si et seulement si $x \in \left[0, \dfrac{\pi^2}{6} - 1\right[\cup \left[1, \dfrac{\pi^2}{6}\right[$.

Dans la partie **I**, on rappelle des propriétés classiques des développements p-adiques de nombres réels et on introduit la notion de développement en série de Sylvester de nombre réel. Les propriétés obtenues dans cette partie sont utilisées dans les parties **IV** et **V**.
Dans la partie **II**, on mène l'étude d'une suite définie implicitement et on propose de calculer une somme célèbre. Les résultats établis dans cette partie sont mis à profit dans la partie **IV**.
Dans la partie **III**, on s'intéresse aux déterminations du logarithme, dont on donne une application à la partie **V**.
Dans la partie **IV**, on dégage des propriétés relatives aux fractions unitaires et on amorce le début de la résolution du problème annoncé. Cette partie constitue un prérequis pour la partie **VI**.
Dans la partie **V**, on établit un théorème de Paul Lévy concernant le développement en série de Sylvester d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$.
Dans la partie **VI**, on démontre le résultat annoncé, dû à Ronald Graham.
Ainsi, les parties **I**, **II** et **III** peuvent être abordées de manière autonome ; la partie **V**, pour sa part, ne dépend que des parties **I** et **III**.

Dans tout le sujet, on note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Si p et q sont des entiers naturels tels que $p \leqslant q$, on pose $[\![p, q]\!] = \{k \in \mathbb{N}\ ;\ p \leqslant k \leqslant q\}$.
$\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs, $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels, $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
Si $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.
Si $z \in \mathbb{C}$, on note $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$ les parties réelle et imaginaire de z.
L'exponentielle complexe d'un nombre complexe z est notée $\exp(z)$ ou e^z.
La fonction sinus est définie sur $\mathbb{C}$ par $\sin : z \mapsto \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\cdot$
Une suite réelle $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *stationne* à la valeur $x \in \mathbb{R}$ s'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout entier $n \geqslant N$, $u_n = x$. Une suite réelle u est dite *stationnaire* s'il existe un réel x tel que u stationne à la valeur x.

I. Développement p-adique et développement en série de Sylvester

Dans cette partie, on se donne un entier $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et un réel $x \in]0, +\infty[$.
On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{\lfloor p^n x \rfloor}{p^n}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{p^n} \quad \text{et} \quad b_n = \begin{cases} \lfloor x \rfloor & \text{si } n = 0 \\ \lfloor p^n x \rfloor - p \lfloor p^{n-1} x \rfloor & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant x < v_n$.

(b) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et convergent vers x.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n \in [\![0, p-1]\!]$.

3. Montrer que la série $\sum \frac{b_n}{p^n}$ converge et que $x = \lfloor x \rfloor + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{p^n}$.

4. Montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne stationne pas à la valeur $(p-1)$.

5. Montrer que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est l'unique suite à valeurs dans $[\![0, p-1]\!]$ ne stationnant pas à la valeur $(p-1)$ telle que $x = \lfloor x \rfloor + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{p^n}$.

Cette dernière expression constitue *le développement p-adique du réel x* et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, b_n est appelé *le n-ième chiffre de x en base p*.

6. (a) Dans cette question **6**.(a), on suppose disposer de $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $x = \frac{a}{b}$ et on considère la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\theta_0 = a$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\theta_{n+1} = p\left(\theta_n - b \lfloor \theta_n / b \rfloor\right).$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{\theta_n}{b} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b_{n+k}}{p^k}$ et $b_n = \left\lfloor \frac{\theta_n}{b} \right\rfloor$.

(b) En déduire que x est rationnel si et seulement si la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est périodique à partir d'un certain rang, c'est-à-dire qu'il existe $(N, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que pour tout entier $n \geqslant N$, $b_{n+q} = b_n$.

7. On considère la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $s_1 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $s_{n+1} = s_n^2 - s_n + 1$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $s_n > 1$ et que $s_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{s_k} = \frac{1}{s_n - 1}$.

8. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $x_1 = x$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{\lfloor 1/x_n \rfloor + 1}.$$

(a) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $q_n = \lfloor 1/x_n \rfloor + 1$.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $q_n > 0$, $q_n(q_n - 1) \leqslant \frac{1}{x_{n+1}}$ et $q_{n+1} \geqslant q_n^2 - q_n + 1$.

(c) Montrer que $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{q_n}$.

9. On suppose dans cette question **9** que $x \leqslant 1$. Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'entiers strictement positifs vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $r_{n+1} \geqslant r_n^2 - r_n + 1$ et $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{r_n}$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $r_n \geqslant 2$ et $\frac{1}{r_n} \leqslant \frac{1}{r_n - 1} - \frac{1}{r_{n+1} - 1}$.

(b) Montrer que $r_1 = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + 1$.

10. Montrer qu'il existe une unique suite d'entiers strictement positifs $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $r_{n+1} \geqslant r_n^2 - r_n + 1$ et $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{r_n}$.

Cette suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est appelée *la suite de Sylvester du réel* x et la somme précédente constitue *son développement en série de Sylvester*.

11. On note $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de Sylvester de x.

(a) Montrer que s'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $r_{n+1} = r_n^2 - r_n + 1$, alors $x \in \mathbb{Q}$.

(b) Établir la réciproque.

II. Estimations préliminaires

Pour tout entier $p \geqslant 2$, soit T_p la fonction telle que, pour x réel, $T_p(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{x+n}\right)^p$.

12. On se donne un entier $p \geqslant 2$.

(a) Établir que la fonction T_p est définie et continue sur $[0, +\infty[$.

(b) Donner les variations de T_p sur $[0, +\infty[$.

(c) Étudier la limite de T_p en $+\infty$.

(d) Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\frac{x^p}{(p-1)(x+1)^{p-1}} < T_p(x) < \frac{x}{p-1}$.

13. On se donne un entier $p \geqslant 2$.

(a) Établir l'existence d'un unique réel $t_p \in [0, +\infty[$ tel que $T_p(t_p) = 1$.

(b) Montrer que $t_p > p - 1$.

(c) Montrer que $t_2 < 2$.

(d) Établir que $\lfloor t_p \rfloor < \frac{1}{2^{1/p} - 1}$.

14. (a) Montrer que pour tout $x > 0$, la suite $(T_p(x))_{p\geqslant 2}$ est strictement décroissante.

(b) En déduire que la suite $(t_p)_{p\geqslant 2}$ est strictement croissante.

15. Montrer que pour tout réel $t > 0$, la suite $\left(\left(1 + \frac{t}{p}\right)^{-p}\right)_{p\geqslant 2}$ est décroissante.

16. On fixe dans cette question $x \in \,]0, +\infty[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit g_n la fonction telle que $g_n(p) = \left(1 + \frac{n}{px}\right)^{-p}$ pour tout entier $p \geqslant 2$.

(a) Montrer que pour tout entier $p \geqslant 2$, $T_p(px) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(p)$.

(b) Montrer que $T_p(px) \xrightarrow[p\to+\infty]{} \dfrac{1}{\exp(1/x)-1}$.

17. Établir l'équivalent : $t_p \underset{p\to+\infty}{\sim} \dfrac{p}{\ln 2}$.

Pour tout entier $p \geqslant 2$, soit G_p la fonction telle que, pour z complexe, $G_p(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{z}{z+n}\right)^p$.

18. Établir que pour tout entier $p \geqslant 2$, la fonction G_p est définie et holomorphe sur l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \{-k\,;\, k \in \mathbb{N}^*\}$.

19. On se donne un entier $p \geqslant 2$.

Soit F_p la fonction telle que pour t réel, $F_p(t) = \begin{cases} \dfrac{t^{p-1}}{e^t-1} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

(a) Montrer que F_p est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$.

On note $\mathcal{F}(F_p) : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F_p(t)e^{-ixt}\,\mathrm{d}t$ la transformée de Fourier de F_p.

(b) Établir que la fonction $\mathcal{F}(F_p)$ est définie sur $\mathbb{R}$.

(c) Montrer que pour tout réel x, $G_p(ix) = \dfrac{(ix)^p}{(p-1)!}\mathcal{F}(F_p)(x)$.

(d) En déduire l'équivalent $G_2(ix) \underset{|x|\to+\infty}{\sim} ix$.

(e) Montrer plus généralement que $G_p(ix) \underset{|x|\to+\infty}{\sim} \dfrac{ix}{p-1}$.

20. On note $H : z \mapsto \dfrac{G_2(z)+1+G_2(-z)}{z^2}$.

(a) Montrer que H est méromorphe sur $\mathbb{C}$.

(b) Établir que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, $H(z+1) = H(z)$.

(c) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, $H(z) = \left(\dfrac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2$.

(d) En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

III. Déterminations du logarithme

Une *détermination du logarithme* sur un ouvert non vide Ω de $\mathbb{C}$ est une fonction continue $f : \Omega \to \mathbb{C}$ telle que pour tout $z \in \Omega$, $\exp(f(z)) = z$.

21. Soit φ_1 et φ_2 deux déterminations du logarithme sur un ouvert connexe non vide Ω de $\mathbb{C}$. Déterminer une relation entre φ_1 et φ_2.

22. Soit Ω un ouvert connexe non vide de $\mathbb{C}$ ne contenant pas 0 et f une fonction holomorphe sur Ω telle que pour tout $z \in \Omega$, $f'(z) = \dfrac{1}{z}\cdot$
Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $f + c$ soit une détermination du logarithme sur Ω.

23. On introduit la fonction $f_1 : z \mapsto -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-z)^n}{n}$ et l'ouvert $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z-1| < 1\}$.

(a) Établir que f_1 est définie et holomorphe sur Ω_1.

(b) Montrer que f_1 constitue une détermination du logarithme sur Ω_1.

24. On note f_2 la fonction $z \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{2n+1}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{2n+1}$ et Ω_2 l'ouvert $\{z \in \mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$.

(a) Établir que f_2 est définie et holomorphe sur Ω_2.

(b) Montrer que pour tout $x > 0$, $f_2(x) = \ln x$.

(c) Montrer que f_2 constitue une détermination du logarithme sur Ω_2.

25. Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction continue.

(a) Établir que si f est une détermination du logarithme sur Ω, alors f est holomorphe.

(b) Plus généralement, montrer que si $\exp \circ f$ est holomorphe, alors f l'est aussi.

26. (a) Dans le plan complexe, soit $\mathcal{D}$ une demi-droite fermée issue de l'origine. Établir l'existence d'une détermination du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathcal{D}$.

(b) Montrer qu'il existe une unique détermination du logarithme sur $\mathbb{C}\setminus(\mathbb{R}_-)$ qui s'annule en 1. On la notera Log.

(c) Montrer que pour tout complexe z tel que $|z| < 1$, $\mathrm{Log}(1-z) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}\cdot$

(d) Montrer qu'il n'existe pas de détermination du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

27. On introduit la fonction $\psi : z \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{iz\ln t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et l'ouvert $\Omega_3 = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Im}(z) > -1\}$.

(a) Établir que ψ est définie sur Ω_3.

(b) Montrer que pour tout $z \in \Omega_3$, $\psi(z) = \dfrac{1}{1-iz}\cdot$

(c) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\left(\psi\left(\dfrac{z}{\sqrt{n}}\right)\right)^n e^{-iz\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-z^2/2}$.

IV. Sommes de fractions unitaires

On note ℓ^+ l'ensemble des suites réelles positives $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dont la série associée $\sum u_n$ converge.

Pour tout $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^+$, on introduit l'ensemble $\mathcal{P}_\infty(u) = \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n u_n \ ; \ (\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^*} \right\}$.

28. (a) Montrer que pour tout $u \in \ell^+$, l'ensemble $\mathcal{P}_\infty(u)$ est bien défini.

(b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On considère la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2^{n-1}$ si $n \leqslant p$, $u_n = 0$ sinon. Vérifier que $u \in \ell^+$ et déterminer l'ensemble $\mathcal{P}_\infty(u)$.

29. Déterminer les suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^+$ telles que $\mathcal{P}_\infty(u)$ soit fini.

30. Soit un réel $a > 0$. On pose $u = \left(\dfrac{a}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Vérifier que $u \in \ell^+$ et déterminer $\mathcal{P}_\infty(u)$.

31. Soit p un entier tel que $p \geqslant 3$. On pose $u = \left(\dfrac{1}{p^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $S = \left[0, \dfrac{1}{p-1}\right]$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et pour toute réunion $R = \bigcup_{i\in[\![1,n]\!]} [a_i, b_i]$ de n segments disjoints de $\mathbb{R}$ (où, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $a_i < b_i$), on pose

$$\mathcal{K}(R) = \bigcup_{i\in[\![1,n]\!]} \left(\left[a_i, a_i + \frac{b_i - a_i}{p}\right] \cup \left[b_i - \frac{b_i - a_i}{p}, b_i\right] \right).$$

(a) Vérifier que $u \in \ell^+$.

(b) Montrer que $\mathcal{P}_\infty(u) \subset \mathcal{K}(S)$.

(c) Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$. On pose $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\varepsilon_n}{p^n}$. Montrer que $x \in \mathcal{K}(\mathcal{K}(S))$ et que $\mathcal{K}(\mathcal{K}(S))$ est la réunion de quatre segments disjoints. Préciser, en fonction de ε_1 et de ε_2, lequel contient x.

(d) On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de parties de $\mathbb{R}$ telle que $S_1 = S$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} = \mathcal{K}(S_n)$. Montrer que $\mathcal{P}_\infty(u) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} S_n$.

32. On considère un entier $p \geqslant 3$ et un réel $\alpha > 1$. On pose $\beta = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{p^{\lfloor n\alpha \rfloor}}$ et $u = \left(\dfrac{1}{p^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(a) Établir que le réel β existe et que si α est rationnel alors β est rationnel.

On suppose jusqu'à la question **32**.(d) que le réel α est irrationnel et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\beta_n = \left\lfloor \dfrac{n+1}{\alpha} \right\rfloor - \left\lfloor \dfrac{n}{\alpha} \right\rfloor$.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\beta_n \in \{0,1\}$.

(c) Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, β_n est le n-ième chiffre de β en base p.

(d) En déduire que β est un réel irrationnel de $\mathcal{P}_\infty(u)$.

33. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^+$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \neq 0$ et $\dfrac{1}{u_n} \in \mathbb{N}$.

Montrer que $\mathcal{P}_\infty(u)$ possède une infinité de rationnels et une infinité d'irrationnels.

34. On prend ici la suite $u = \left(\dfrac{1}{s_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite définie à la question **7**.

(a) Vérifier que $u \in \ell^+$.

(b) Soit $x \in \mathcal{P}_\infty(u)$. Montrer que, à l'exception d'un élément x à préciser, il existe une unique suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ telle que $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{s_n}$.

(c) Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$. Montrer que le réel $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{s_n}$ est rationnel si et seulement si la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est stationnaire.

Pour tous $u \in \ell^+$ et $n \in \mathbb{N}^*$, le n-ième terme u_n de u est dit *substituable* si $u_n \leqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

35. On considère une suite $u \in \ell^+$ dont tous les termes sont substituables. On pose $\sigma = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

On se propose d'établir que $\mathcal{P}_\infty(u) = [0, \sigma]$.

(a) Montrer que 0 et σ appartiennent à $\mathcal{P}_\infty(u)$.

On suppose jusqu'à la question **35**.(d) que $\sigma > 0$ et on considère $x \in]0, \sigma[$.
On définit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ par récurrence comme suit : $\varepsilon_1 = 1$ si $u_1 \leqslant x$ et $\varepsilon_1 = 0$ sinon ; si, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les termes $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ sont définis, alors $\varepsilon_{n+1} = 1$ si $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k u_k + u_{n+1} \leqslant x$ et $\varepsilon_{n+1} = 0$ sinon.

(b) Montrer que la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas constante.

(c) Établir que la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne stationne pas à la valeur 1.

(d) En déduire que $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n u_n$ et le résultat annoncé.

36. On prend ici la suite $u = \left(\dfrac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(a) Vérifier que $u \in \ell^+$.

(b) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, le n-ième terme u_n de u est substituable.

(c) Montrer que $\mathcal{P}_\infty(u) = \left[0, \dfrac{\pi^2}{6} - 1\right] \cup \left[1, \dfrac{\pi^2}{6}\right]$.

37. On pose $u = \left(\dfrac{1}{n^3}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On reprend les notations de la partie **II**, en particulier celles de la question **13**.

(a) Vérifier que $u \in \ell^+$.

(b) Montrer que pour tout réel $x \geqslant 0$, $T_3(x) \geqslant \dfrac{x^3}{(x+1)^3} + \dfrac{x^3}{(x+2)^3} + \dfrac{x^3}{2(x+3)^2}$.

(c) En déduire que $t_3 < 3$.

(d) Déterminer, en fonction de $\zeta = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$, l'ensemble $\mathcal{P}_\infty(u)$.

38. On se donne un entier $p \geqslant 2$. On prend ici la suite $u = \left(\dfrac{1}{n^p}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathcal{P}_q = \left\{\displaystyle\sum_{k=1}^{q} \frac{\varepsilon_k}{k^p}\ ;\ (\varepsilon_k)_{k\in[\![1,q]\!]} \in \{0,1\}^q\right\}$.

(a) Vérifier que $u \in \ell^+$.

(b) Montrer qu'il existe un unique entier $N_p \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\{n \in \mathbb{N}^*\,;\ \text{le } n\text{-ième terme } u_n \text{ de } u \text{ n'est pas substituable}\} = [\![1, N_p]\!].$$

(c) Montrer que $N_p \underset{p\to+\infty}{\sim} \dfrac{p}{\ln 2}$.

(d) Établir que l'application $(\varepsilon_k)_{k\in[\![1,N_p]\!]} \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{N_p} \frac{\varepsilon_k}{k^p}$ est bijective de $\{0,1\}^{N_p}$ sur $\mathcal{P}_{N_p}$.

(e) On pose $\rho_p = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(N_p+k)^p}$.
Montrer que $\mathcal{P}_\infty(u) = \displaystyle\bigcup_{\omega\in\mathcal{P}_{N_p}} [\omega, \omega+\rho_p]$, où les segments sont deux à deux disjoints.

V. Un théorème de Paul Lévy sur les séries de Sylvester

Dans cette partie, on se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sur lequel est définie une variable aléatoire uniformément distribuée sur $[0,1]$.

39. Montrer qu'il existe une variable aléatoire U suivant la loi uniforme sur $[0,1]$ telle que pour tout $\omega \in \Omega$, $U(\omega) \in\,]0,1]$.

On reprend les notations de la partie **I**, en particulier celles de la question **10**. Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $(Q_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de Sylvester du réel $U(\omega)$; la relation $U(\omega) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{Q_n(\omega)}$ est donc le développement en série de Sylvester de $U(\omega)$.

40. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Q_n est une variable aléatoire.

On pose $\mathcal{C}_1 = \{k \in \mathbb{N}\,;\ k \geqslant 2\}$ et pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\mathcal{C}_n = \left\{(k_1, \cdots, k_n) \in \mathbb{N}^n\,;\ k_1 \geqslant 2 \text{ et } \forall i \in [\![1, n-1]\!],\ k_{i+1} \geqslant k_i^2 - k_i + 1\right\}.$$

Dans la question suivante, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ désigne la suite définie dans la question **7**.

41. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Établir que $(s_1, \ldots, s_n) \in \mathcal{C}_n$ et que pour tout $(k_1, \ldots, k_n) \in \mathcal{C}_n$,

$$k_1 \geqslant s_1, \ldots, k_n \geqslant s_n.$$

42. Montrer que pour tous $k \in \mathcal{C}_1$ et $(k_1, k_2) \in \mathcal{C}_2$,

$$(Q_1 = k) = \left(\frac{1}{k} < U \leqslant \frac{1}{k-1}\right) \text{ et } (Q_1 = k_1, Q_2 = k_2) = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} < U \leqslant \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2 - 1}\right).$$

43. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(k_1, \ldots, k_n) \in \mathcal{C}_n$. Montrer que $\mathbb{P}(Q_1 = k_1, \ldots, Q_n = k_n) = \dfrac{1}{k_n(k_n - 1)}$.

44. On considère un entier $n \geqslant 2$. Soit $(j,k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $j \geqslant s_{n-1}$ et $k \geqslant j^2 - j + 1$.
Montrer que $\mathbb{P}(Q_{n-1} = j) > 0$ et que $\mathbb{P}(Q_n = k | Q_{n-1} = j) = \dfrac{j(j-1)}{k(k-1)}$.

45. Pour tous entiers $n \geqslant 1$ et $k \geqslant 2$, on pose $P_n(k) = \mathbb{P}(Q_n = k)$.

(a) Montrer que pour tous entiers $n \geqslant 2$ et $k \geqslant 2$, $P_n(k) = \displaystyle\sum_{\substack{j \geqslant 2\,; \\ j^2 - j + 1 \leqslant k}} \frac{j(j-1)}{k(k-1)} P_{n-1}(j)$.

(b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{P_n(k)}{k} \leqslant \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{P_{n-1}(j)}{j^2 - j + 1}$.

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{P_n(k)}{k} \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

On se propose dans la suite d'établir le théorème de Paul Lévy suivant :
la suite de variables aléatoires $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} \ln\Big(\dfrac{Q_n}{Q_1 \cdots Q_{n-1}}\Big) - \sqrt{n}\right)_{n \geqslant 2}$ converge en loi vers la loi gaussienne centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.
On pose $\phi_1 : t \mapsto \mathbb{E}\left(e^{it \ln Q_1}\right)$ et pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$\phi_n : t \mapsto \mathbb{E}\Big(e^{it \ln\left(\frac{Q_n}{Q_1 \cdots Q_{n-1}}\right)}\Big) \quad \text{et} \quad \psi_n : t \mapsto \sum_{k=n^2-n+1}^{+\infty} e^{it \ln\left(\frac{k}{n^2}\right)} \frac{n(n-1)}{k(k-1)}.$$

46. Montrer que $(\phi_n)_{n \geqslant 1}$ et $(\psi_n)_{n \geqslant 2}$ sont des suites de fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

47. Soit un entier $n \geqslant 3$ et un réel t.

Montrer que la somme $\displaystyle\sum_{(k_1, \cdots, k_{n-1}) \in \mathcal{C}_{n-1}} \frac{e^{it \ln\left(\frac{k_{n-1}}{k_1 k_2 \cdots k_{n-2}}\right)}}{k_{n-1}(k_{n-1} - 1)} \psi_{k_{n-1}}(t)$ existe et vaut $\phi_n(t)$.

48. On rappelle que ψ désigne la fonction définie à la question **27**.

(a) Montrer qu'il existe un réel $C > 0$ tel que pour tous entier $n \geqslant 2$ et réel t, $|\psi_n(t) - \psi(t)| \leqslant \dfrac{C(1 + |t|)}{n}$.

(b) Établir, pour tous entier $n \geqslant 2$ et réel t, $|\phi_n(t) - \psi(t)\phi_{n-1}(t)| \leqslant C \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} (1 + |t|)$.

(c) Montrer que pour tous entiers m et n tels que $n > m \geqslant 1$ et pour tout réel t, $|\phi_n(t) - \psi^{n-m}(t)\phi_m(t)| \leqslant 3C \left(\dfrac{2}{3}\right)^m (1 + |t|)$.

(d) En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi_n\Big(\dfrac{t}{\sqrt{n}}\Big) e^{-it\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-t^2/2}$.

(e) Montrer le théorème de Paul Lévy annoncé.

VI. Un théorème de Ronald Graham

Dans toute cette partie, on se fixe un entier $p \geqslant 2$ et on considère la suite $u = \left(\dfrac{1}{n^p}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
On reprend les notations de la partie **IV**, en particulier celles de la question **38**. En posant $\mathcal{U}_p = \displaystyle\bigcup_{\omega \in \mathcal{P}_{N_p}} [\omega, \omega + \rho_p[$, on se propose d'établir que

$$\mathcal{U}_p \cap \mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{P}_n.$$

À l'aide d'une méthode due à R. Sprague, on commence par montrer, jusqu'à la question **53**, que tout entier naturel assez grand est la somme de puissances p-ièmes d'entiers naturels distincts.

49. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que $A_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 7\end{pmatrix}$, $B_1 = \begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en notant I_{2^n} la matrice identité de taille 2^n à coefficients réels,

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix}A_n & 0\\ 0 & B_n + 2^{n+2}I_{2^n}\end{pmatrix}, \quad B_{n+1} = \begin{pmatrix}B_n & 0\\ 0 & A_n + 2^{n+2}I_{2^n}\end{pmatrix}.$$

(a) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$, les matrices A_n^k et B_n^k ont même trace.

(b) En déduire l'existence d'un entier pair $q \geqslant 2$ et de $2q$ entiers naturels impairs distincts $a_1, a_2, \cdots, a_{2q}$ tels que pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $a_1^k + \cdots + a_q^k = a_{q+1}^k + \cdots + a_{2q}^k$.

(c) Établir dans $\mathbb{R}[X]$ l'égalité $(X+a_1)^p+\cdots+(X+a_q)^p = (X+a_{q+1})^p+\cdots+(X+a_{2q})^p$.

50. On considère un entier pair $D \geqslant 2$. Pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!] \times \{0, 1\}$, on pose

$$M_{i,j}(X) = \sum_{k=1}^{q}(X + a_{jq+k} + iD)^p \in \mathbb{R}[X].$$

(a) Montrer qu'on peut choisir D de sorte que pour tous éléments distincts $(k, i) \neq (\ell, j)$ de $[\![1, 2q]\!] \times [\![1, p]\!]$, on ait : $a_k + iD \neq a_\ell + jD$. On fait cette hypothèse par la suite.

(b) Pour tout $\bar{k} = (k_1, \cdots, k_p) \in [\![1, 2q]\!]^p$, on pose

$$S_{\bar{k}}(X) = (X + a_{k_1} + D)^p(X + a_{k_2} + 2D)^p \cdots (X + a_{k_p} + pD)^p \in \mathbb{R}[X].$$

Montrer qu'il existe un entier naturel pair ω_p tel que $(S_{\bar{k}}(\omega_p))_{\bar{k}\in[\![1,2q]\!]^p}$ constitue une famille de $(2q)^p$ puissances p-ièmes d'entiers impairs deux à deux distincts.

(c) Établir que le produit $\pi_p = \prod_{k=1}^{p} M_{k,\varepsilon_k}(\omega_p)$ est un entier naturel pair, indépendant du choix de $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p) \in \{0, 1\}^p$.

51. Montrer qu'il existe une famille $(\mathcal{M}_i)_{i\in[\![1,2^p]\!]}$ de 2^p ensembles finis non vides d'entiers naturels impairs, deux à deux disjoints, telle que pour tout $i \in [\![1, 2^p]\!]$, $\pi_p = \sum_{k\in\mathcal{M}_i} k^p$.

52. Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ et $(b_k)_{k\in[\![0,r]\!]} \in [\![0, 2^p - 1]\!]^{r+1}$ tels que $m = \sum_{k=0}^{r} b_k 2^{pk}$.

(b) En déduire que $m\pi_p$ est la somme de puissances p-ièmes d'entiers naturels distincts.

On pose $\Theta_p = \sum_{k=1}^{\pi_p-1} (k\pi_p + 1)^p$.

53. Montrer que tout entier n vérifiant $n \geqslant \Theta_p$ est la somme de puissances p-ièmes d'entiers naturels distincts.

54. Montrer qu'il existe un entier $\delta_p \geqslant \Theta_p$ tel que pour tout entier $n \geqslant \delta_p$, $\sum_{k=1}^{n} k^p \geqslant (n + 1)^p$.

On se fixe jusqu'à la question **60** un rationnel x de $\mathcal{U}_p$.
On introduit des entiers $C_p > 2\delta_p$ et $K_p > (C_p + 1)!$ vérifiant la condition suivante : pour tout $m \in [\![\Theta_p, \Theta_p + (\delta_p C_p)^p]\!]$, il existe une partie finie non vide $\mathcal{M}$ de $\mathbb{N}^*$ telle que, d'une part, $m = \sum_{k\in\mathcal{M}} k^p$, et telle que, d'autre part, tout élément de $\mathcal{M}$ s'écrit comme le produit d'éléments distincts de $[\![1, K_p]\!]$.

55. Montrer qu'on peut choisir K_p assez grand de sorte qu'il existe $\Lambda \in \mathcal{P}_{K_p-1}$ et un entier naturel R_p multiple de K_p tels que

$$x - \Lambda = \frac{R_p}{(K_p!)^p} \quad \text{et} \quad \frac{R_p}{(K_p!)^p} < \frac{1}{(K_p-1)^p}.$$

On suppose dans toute la suite que K_p et R_p se trouvent ainsi fixés.
On suppose jusqu'à la question **59**.(b) que $R_p > 0$.
On note $\Delta_p = \prod\limits_{C_p+1 \leqslant i \leqslant K_p} i^p$ et $\mathcal{N}$ l'ensemble des entiers m inférieurs à Δ_p qui s'écrivent comme le produit de puissances p-ièmes d'entiers distincts de $[\![C_p, K_p]\!]$, c'est-à-dire tels qu'il existe $h \in \mathbb{N}^*$ et des entiers $i_1 < i_2 < \cdots < i_h$ dans $[\![C_p, K_p]\!]$ vérifiant : $m = \prod\limits_{1 \leqslant k \leqslant h} i_k^p$.
On note $C_p^p = m_1 < m_2 < \cdots < m_Z = \Delta_p$ les éléments de $\mathcal{N}$.

56. Montrer que pour tout $k \in [\![1, Z-1]\!]$, $\dfrac{m_{k+1}}{m_k} \leqslant 2^p$.

On pose $\mathcal{B} = \{k \in [\![0, C_p - 1]\!] \,;\, \exists i \in [\![1, Z]\!] \text{ tel que } k^p m_i \leqslant R_p - \Theta_p < (k+1)^p m_i\}$.

57. Montrer que $\mathcal{B}$ est non vide.

On pose $G = \max \mathcal{B}$.

58. On suppose dans cette question que $G < \delta_p$.
   (a) Établir que $R_p \in [\![\Theta_p, \Theta_p + (\delta_p C_p)^p]\!]$.
   (b) En déduire que $x \in \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{P}_n$.

59. On suppose dans cette question que $G \geqslant \delta_p$. On dispose alors de $i_0 \in [\![1, Z]\!]$ tel que $G^p m_{i_0} \leqslant R_p - \Theta_p < (G+1)^p m_{i_0}$.
   (a) Montrer qu'on peut définir

$$k_0 = \min \{k \in [\![1, G]\!] \;;\; (k^p + (k+1)^p + \cdots + G^p)\, m_{i_0} \leqslant R_p - \Theta_p\}.$$

   (b) Montrer que, en posant $R'_p = R_p - (k_0^p + (k_0+1)^p + \cdots + G^p) m_{i_0}$, on a :

$$0 \leqslant R'_p - \Theta_p < (k_0 - 1)^p m_{i_0}.$$

60. Montrer que $x \in \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{P}_n$.

61. Établir que $\mathcal{U}_p \cap \mathbb{Q} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{P}_n$.

62. (a) Montrer qu'il existe un entier $r \geqslant 2$ tel que $\dfrac{1}{4}$ soit la somme de r inverses de carrés d'entiers naturels distincts.
   (b) Montrer que pour tout rationnel $x \in \left]0, \dfrac{\pi^2}{6} - 1\right[\cup \left]1, \dfrac{\pi^2}{6}\right[$, il existe une infinité de suites $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ stationnant à la valeur 0 telles que $x = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\varepsilon_n}{n^2}$.