

GÉOMÉTRIE DES CRISTAUX

Jacques Borowczyk

IUFM d'Orléans-Tours

Et c'est toujours à la brisure,

Finalement

Que se mesure

Ce qui ne peut se mesurer.

Aragon

Précisément du fait que la forme du monde est la plus parfaite qui soit, et conçue par le créateur le plus sage, rien ne se passe dans le monde qui ne démontre l'application d'une règle de maximum ou de minimum.

Leonhard Euler

La mathématisation des structures cristallines passionne depuis la fin du XVIIIème siècle antiquaires, géologues, physiciens et mathématiciens. Comment expliquer les belles formes cristallines à pans coupés du quartz et des diamants ?

Dès l'Antiquité on a classé les pierres, les minéraux et les métaux mais le mot de minéralogie n'apparaît qu'au XIIème siècle et désigne alors la science des sels. Son sens actuel remonte à la traduction en 1755 d'un traité de la *Minéralogie* de Jean Wallerius (1709-1785).

La découverte des propriétés des cristaux débute en 1647, lorsque l'astronome et mécanicien Huygens s'interroge sur un étrange phénomène d'optique : la biréfringence de la calcite, phénomène signalée par un professeur de Copenhague Erasmus Bartholin (1625-1698). Ce cristal de calcite posé sur la page d'un livre renvoie deux images des lignes qu'il recouvre. Par ailleurs quand le cristal de calcite se brise, tous les solides obtenus sont semblables au solide polyédral initial. La Hire fait des observations de ce type avec le gypse de Montmartre (1710).

Huygens présume que le cristal est fait d'un assemblage de petits polyèdres, idée qui sera reprise dans les Lettres philosophiques (1729) de Louis Bourguet : « Les petites particules du cristal ont la même figure que le cristal lui-même ».

L'observation rationnelle des formes cristallines est consignée dans le *Prodomus* de Stenon (1669).

Le Suédois Linné (1707-1778) tente de classer les minéraux en ne tenant compte que de leur forme cristalline. En 1772 les éléments de symétrie sont pris en compte par un professeur de l'université d'Uppsala Torbern Bergman (1735-1784) auteur

d'une théorie réticulaire des réseaux. Bergman essaie de faire dériver, non seulement les formes secondaires de la calcite mais encore les formes d'autres minéraux du rhomboèdre. « La forme de la cristallisation n'a pas un caractère constant » affirme Buffon dans son *Histoire des minéraux*.

En 1772 Jean-Baptiste Romé de l'Isle (1763-1790) publie un essai de cristallographie, acte de naissance d'une science qui se préoccupe de décrire « les figures géométriques propres à différents corps du règne minéral, connues vulgairement sous le nom de cristaux... ». Il s'oppose au « mythe de la végétation des pierres » qui affirme que les cristaux se reproduisent par germe et s'inscrit dans la tradition de Sténon pour lequel les cristaux se forment par juxtaposition. Il est combattu par Réaumur et Bourguet.

Il affirme que les minéraux sont composés de « molécules intégrantes » qui ont « une figure constante et déterminée ».

Un de ses élèves Arnaud de Carangeot (1742-1806) invente en 1772 un goniomètre qui mesure les angles dièdres afin de généraliser la loi de constance des angles dièdres entrevues par Sténon dès 1669.

René-Just Haüy (1743-1822), frère de Valentin amorce en 1784 une nouvelle « théorie sur la structure des cristaux ».

Suite aux travaux de l'abbé Haüy, qui casse un « spath calcaire prismatique » pour en détacher un rhomboèdre semblable à celui du spath d'Islande. Il apparaît ainsi comme le créateur de la cristallographie géométrique synthétisée dans ses *Traité de minéralogie* et *Traité de cristallographie* publiés en 1801 et 1822. Les cristaux résultent de l'assemblage d'une « molécule constituante ». Les clivages montrent que les tronçatures ne sont pas des « plans géométriques » mais sont disposées « à peu près comme les degrés d'un escalier ». Il ramène les systèmes cristallins à six formes géométriques et que chaque « molécule intégrante » a une forme invariable dans une espèce minérale donnée.

Les instruments d'observation sont perfectionnés à partir de 1809 on améliore le goniomètre de Carangeot et on utilise le cercle répéteur de Borda (utilisé aussi lors des opérations de la méridienne).

Les travaux de J. F. Ch. Hessel qui établit en 1830 qu'il ne peut exister que 32 sortes de symétries dans les polyèdres cristallins, et que seuls des axes de symétrie d'ordre 2, 3, 4 et 6 sont possibles, ne furent véritablement révélés qu'en 1891 par Leonhart Sohncke (1842-1897).

Un peu plus tard les travaux de G. Delafosse (1796-1878) auteur *De la structure des cristaux* (1840) et des *Recherches sur la cristallisation considérée sous les rapports physiques et mathématiques* compléteront les recherches.

Le système de notations des cristaux est amélioré par Gabriel Lamé (1795-1870). En 1843, on sait qu'un neveu du poète, le comte Léopold Hugo 1828-1895 s'est beaucoup intéressé aux structures cristallines et, après avoir publié en 1867 sa *Théorie des cristalloïdes élémentaires*, a créé une géométrie *hugodomoïdale* pour les décrire.

Les interactions entre mathématiques et minéralogie s'accroissent influençant le vocabulaire au point que l'on a pu se gausser de ce cristal saisi par la théorie des groupes. Les groupes permettent de systématiser les considérations de symétrie développées par un officier de marine français Auguste Bravais (1811-1863) – la classification rationnelle des formes cristallines, les arrangements possibles se limitent à 7 systèmes, 32 classes et 14 réseaux - puis Louis Pasteur. Le cristallographe russe, Ivgraf Stepanovitch Fedorov (1853 – 1919) perfectionne les instruments optiques d'observation des cristaux et énumère les 230 groupes d'espace de cristaux possibles.

Ainsi la mathématisation du solide est justifiable de mathématiques extrêmement riches qui doivent rendre compte de la structure, à savoir l'ensemble des contraintes qui lui assurent sa cohésion et une répartition géométrique de ses particules.

La mathématisation des formes (*Gestalt* en allemand) est l'objet de nombreux travaux à l'origine notamment de l'algèbre linéaire pour laquelle l'oeuvre de Grassmann est pionnière. C'est un exemple d'intervention de ses théories. Les premiers travaux des frères Curie portent sur la cristallographie (1894) : ils prédirent puis observèrent les propriétés piézoélectriques de certains cristaux à partir d'une réflexion sur la symétrie. Pierre Curie énonça le principe de symétrie qui permet d'anticiper certaines propriétés qualitatives d'un système macroscopique ou microscopique dont la symétrie est connue.

Comment voir au-delà du visible : chimie et investigations physiques et observations microscopiques au rayon X vont affiner la modélisation de la matière.

Mais certains aspects d'une science inductive persistent. Pour les petits cristaux le facteur dominant semble être la tendance à minimiser l'énergie de sa surface libre. On peut donc chercher quelle forme prendra un petit cristal d'un volume donné, pour que l'énergie de sa surface libre soit la plus petite possible.

En 1901, le spécialiste des cristaux Georg Wulff énonça cette hypothèse :

« pour un volume donné, il existe un corps convexe unique, délimité par des surfaces planes, dont l'énergie superficielle est minimale parmi tous les corps à faces lisses de même volume ».

Wulff décrivit une procédure relativement simple pour trouver et construire la solution de ce problème de minimum ainsi appelée les polyèdres de Wulff.

En 1944, Alexandre Dinghas démontra que toute forme différente d'un polyèdre de Wulff met en jeu une énergie superficielle plus grande.

Que conclure ? Empruntons à Victor Hugo le mot de la fin :

la science va sans cesse se raturant elle-même. Ratures fécondes

(*William Shakespeare*, I, III, 4, p. 297)

relayé par Gaston Bachelard :

L'esprit scientifique est essentiellement une rectification du savoir [...]. Il juge son passé scientifique en le condamnant. Sa structure est la conscience de ses fautes historiques (Le Nouvel Esprit scientifique, p. 173)

Et sur une note plus pédagogique à Yves Chevallard un extrait des *Cahiers pédagogiques*, n° 427, 2004 Pour une nouvelle épistémologie scolaire :

Il y a une évolution du rapport aux mathématiques dans une société qui ne les envisage plus guère comme un outil d'intelligence du monde, mais comme une réalité en soi, que l'on visite avec déférence. Ce processus [...] change la pratique dans les classes en expulsant le souci de les faire apparaître comme outil d'intervention du réel.

Petit dictionnaire de grands Cristallographes

Bravais Auguste (1811 – 1863)

Physicien et minéralogiste français. Bravais met au point la théorie mathématique des 14 réseaux cristallins et invente la notion de réseau réciproque. Avec son frère Louis il travaille sur les parastiches végétales.

Curie Pierre (1859 – 1906)

Physicien français. Avec son frère Jacques il découvre la piézoélectricité des cristaux. Il énonce en 1894 le principe de symétrie.

Delafosse Gabriel (1796 – 1878)

Minéralogiste français. Elève de l'abbé Haüy, il contribue à l'énumération des 14 réseaux cristallins.

Fedorov Iegraf Stepanovitch (1853 – 1919)

Cristallographe russe, Fedorov détermine les 230 groupes d'espace de cristaux et perfectionne les instruments optiques d'observation des cristaux.

Haüy René Just (1743 – 1822)

Prêtre français, l'abbé René Haiüy publie d'importants ouvrages de cristallographie ; en 1774 il énonce la loi des troncatures rationnelles et formule en 1801 l'hypothèse d'une triple périodicité spatiale des cristaux.

Lamé Gabriel (1795 – 1870)

Physicien et mathématicien français. Il étudie l'élasticité des cristaux.

Pasteur Louis (1822-1895)

Chimiste et biologiste ; il débute sa carrière scientifique en étudiant les propriétés optiques des tartrates et découvre la chiralité des molécules.

Petit dictionnaire des cristaux cités

Apatite

Calcite

Chlorure de césium

Chlorure de sodium

Sulfure de plomb

Bromure d'argent

Diamant

Fluorine

Phosgénite

Pyrite

Vanadinite

Petit dictionnaire des parallélépipèdes

Parallélépipède obliqangle

Prisme droit à base parallélogramme

Parallélépipède droit

Prisme droit à base rhombe d'angle 120°

Prisme à base carrée

Cube

Références bibliographiques :

Balibar Françoise, *La science des cristaux*, Paris, Hachette, 1991, 102 p.

Blumenthal Leonard, *Theory and applications of distance geometry*, Oxford, Oxford University Press, 1953.

Blumenthal Leonard, *A modern view of geometry*, New York, Dover Publications, 1980.

H. S. M. Coxeter, *Introduction to geometry*, John Wiley, 1961.

H. S. M. Coxeter, *Regulat polytopes*, Macmillan, 1963.

Ducrocq A. & Warufsel A., *Les mathématiques, plaisir et nécessité*, Vuibert, 2001.

Hildebrandt Stefan, Tromba Anthony, *Mathématiques et formes optimales*, Paris, Belin, 1986, 190 p.

Jean Sivardière, *La symétrie en mathématiques, physique et chimie*, Presses universitaires de Grenoble, 1995.

L. Joly, *Les polyèdres réguliers, semi-réguliers et composés*, Blanchard, 1979.

A.de Lapparent, *Précis de minéralogie*, Masson, 1921.

Y. Sirovine, M. Chaskolskaïa, *Fondements de la physique des cristaux*, Mir, 1984.

Henri Bacry, *La symétrie dans tous ses états*, Vuibert, 2000.

Jocelyne et Lysiane Denière, *Nature et géométrie dans l'espace Expérience pédagogique*, Editions Kim, BP 74 Malo 59942 Dunkerque Cedex 2, 1990.

Jocelyne et Lysiane Denière, *Histoire des pierres et pierres de l'Histoire- Calcédoine, opale*, Editions Kim, BP 74 Malo 59942 Dunkerque Cedex 2, 1986.

Renaud Avellas, Yves Rimboung, *Modélisation géométrique d'un cristal et cristallisation d'un modèle*, *Grand N*, n° 53, 79-119, 1993-1994.

Vincenzo de Michele, *Le monde des cristaux*, Grange Batelière, Paris, 1969.

Mais aussi :

Beaune Florimond de, *Doctrine de l'angle solide*, P. Costabel éd., Paris, Vrin, 1975.

Curie P., *Sur la formation des cristaux et sur les constantes capillaires de leur différentes faces*, Bulletin de la Société des Minéralogistes français, n° 8, 1885, 145.

OEuvres, Paris, Gautier-Villars, 1908.

Haüy René-Just, *Traité de cristallographie*, Paris, 1822.

Hugo Léopold, *Théorie des cristalloïdes élémentaires*, Paris, 1867.

Hugo Léopold, *Essai sur la géométrie des cristalloïdes*, Paris, 1873.