

∞ CONCOURS AVENIR - 25 avril 2021 ∞

DURÉE : 1 h 30 min

CONSIGNES SPÉCIFIQUES

Lisez attentivement les consignes afin de vous placer dans les meilleures conditions de réussite de cette épreuve.

Aucun brouillon n'est distribué. Les pages blanches de ce sujet peuvent être utilisées à l'usage de brouillon.

L'usage de la calculatrice ou de tout autre appareil électronique (connecté ou non) est interdit.

Aucun document autre que ce sujet et sa grille réponse n'est autorisé.

Attention, il ne s'agit pas d'un examen mais bien d'un concours qui aboutit à un classement.

Si vous trouvez ce sujet « difficile », ne vous arrêtez pas en cours de composition, n'abandonnez pas, restez concentré(e).

Les autres candidats rencontrent probablement les mêmes difficultés que vous!

Barème :

Une seule réponse exacte par question. Afin d'éliminer les stratégies de réponses au hasard, **chaque réponse exacte est gratifiée de 3 points**, tandis que **chaque réponse fautive est pénalisée par le retrait d'un point.**

GÉOMÉTRIE DU PLAN ET DE L'ESPACE

1. Soient \mathcal{P} , \mathcal{R} et \mathcal{T} trois plans de l'espace, deux à deux non parallèles. On appelle \mathcal{D} la droite d'intersection du plan \mathcal{P} avec le plan \mathcal{R} .

On peut alors affirmer que la droite \mathcal{D} est :

- | | |
|---|---|
| <p>a. forcément sécante au plan \mathcal{T}</p> <p>b. forcément parallèle au plan \mathcal{T}</p> | <p>c. forcément incluse dans \mathcal{T}</p> <p>d. éventuellement parallèle au plan \mathcal{T}</p> |
|---|---|
2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(1 ; -1)$, $B(4 ; -4)$ et $C(2021 ; -2021)$.

Combien existe-t-il de cercle(s) passant(s) par ces trois points ?

- | | |
|-------------------------------------|--|
| <p>a. Aucun</p> <p>b. Un unique</p> | <p>c. Deux exactement</p> <p>d. Une infinité</p> |
|-------------------------------------|--|
3. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, l'ensemble des points $M(x ; y)$ tels que $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$ est un cercle de centre le point de coordonnées :

- | | |
|---|---|
| <p>a. $(1 ; -2)$</p> <p>b. $(-1 ; 2)$</p> | <p>c. $(-2 ; 1)$</p> <p>d. $(2 ; -1)$</p> |
|---|---|

4. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, l'ensemble des points $M(x ; y)$ tels que $x^4 - y^4$ est constitué :

- | | |
|--|---|
| <p>a. d'une droite et d'un cercle</p> <p>b. de deux droites et d'un cercle</p> | <p>c. de deux droites</p> <p>d. de deux droites et d'un point n'appartenant pas à celles-ci</p> |
|--|---|

5. Soient A et B deux points distincts du plan muni d'un repère orthonormé. L'ensemble des points M tels que $AM^2 - AB^2 = 0$ est :

- | | |
|---|---|
| <p>a. la médiatrice du segment $[AB]$</p> <p>b. le cercle de centre A et de rayon AB</p> | <p>c. le cercle de centre B et de rayon AB</p> <p>d. le cercle de centre B et de rayon \sqrt{AB}</p> |
|---|---|

6. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère la droite \mathcal{D} dont une équation paramétrique est donnée par :

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -4 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

La droite \mathcal{D} coupe le plan de base xOz au point de coordonnées :

- | | |
|---|---|
| <p>a. $(3 ; 0 ; 3)$</p> <p>b. $(-3 ; -6 ; 0)$</p> | <p>c. $\left(0 ; -3 ; \frac{3}{2}\right)$</p> <p>d. $(0 ; 2 ; 0)$</p> |
|---|---|

7. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère le cercle \mathcal{C} d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 6x + 3 = 0$ et \mathcal{D} la droite d'équation réduite $y = ax$.

À quel intervalle doit appartenir le nombre réel a pour que \mathcal{D} et \mathcal{C} aient au moins un point en commun?

a. $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$
b. $[0; \sqrt{3}]$

c. $[0; \sqrt{2}]$
d. $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$

CALCUL NUMÉRIQUE, SUITES NUMÉRIQUES

8. Combien existe-t-il de nombre(s) réel(s) égaux à leurs inverses?

a. Aucun
b. Un unique

c. Exactement deux
d. Une infinité

9. Quels que soient les réels a , b et c , on a : $(a + b)^2 - (a + c)^2 =$

a. $(b - c)(2a + b + c)$
b. $(b - c)(a + 2b + c)$

a. $(b - c)(a + b + 2c)$
d. $(a - c)(a + 2b + c)$

10. Soient $a = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ et $b = \sqrt{7}$. On peut alors affirmer que :

a. $a < b$
b. $a > b$

c. $a = b$
les nombres a et b ne peuvent pas être comparés

11. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on peut affirmer que la somme des n premiers entiers pairs non nuls $2 + 4 + \dots + 2n$ est égale à :

a. $\frac{n(n+1)}{2}$
b. $\frac{2n(2n+1)}{2}$

c. $\frac{n(2n+1)}{2}$
d. $\frac{2n(2n+1)}{2}$

Pour les deux questions suivantes, on considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = (-1)^n - u_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{et} \quad v_n = (-1)^n u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

12. La suite (v_n) est :

a. arithmétique de raison -1
b. géométrique de raison 1

c. géométrique de raison -1
d. ni arithmétique, ni géométrique

13. Pour tout entier naturel n , on a :

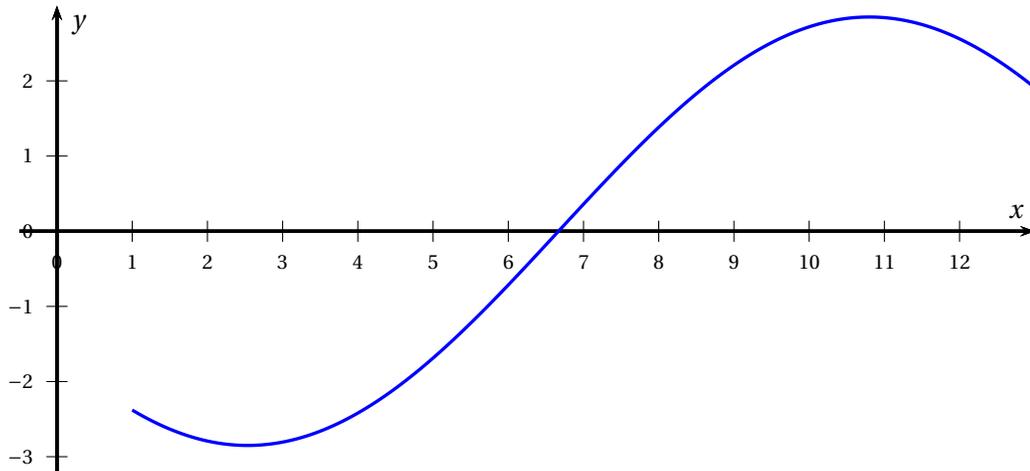
$$\text{a. } y = \frac{n(n+1)}{2}x + \frac{n-n^2}{2}$$

$$\text{b. } y = \frac{n(n+1)}{2}x + \frac{n+2-n^2}{2}$$

$$\text{c. } y = \frac{n(n+1)}{2}x + \frac{n-n^2}{2}$$

$$\text{d. } y = \frac{(n+1)(n+2)}{2}x + \frac{n+2-n^2}{2}$$

20. On donne ci-dessous, dans le plan muni d'un repère orthonormé, la courbe représentative d'une fonction f , définie et dérivable sur l'intervalle $[1; 13]$:



Combien l'équation $f'(x) = 0$ possède-t-elle de solution(s) dans l'intervalle $[1; 13]$?

- a. 0 b. 1 c. 2 d. 3
21. On admet que, pour tout nombre réel x , on a :

$$e^x \geq x + 1$$

On peut alors affirmer que pour tout nombre réel x , on a :

- a. $e^{-x^2} \leq (x-1)(x+1)$ c. $e^{-x^2} \geq x^2 - 1$
b. $e^{-x^2} \leq -x^2 + 1$ d. $e^{-x^2} \geq (1-x)(1+x)$

22. Pour tout réel x , on a : $\ln\left(\frac{1+e^x}{1+e^{-x}}\right) =$

- a. e^x c. x
b. e^{2x} d. $2x$

23. Soit f la fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = e^{xe^x}$$

On a alors $f'(x) =$

- a. e^{xe^x} c. $(x+1)e^{(x+1)e^x}$
b. $(x+1)e^{xe^x}$ d. $(x+1)e^{x(e^x+1)}$

30. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = xe^{2x}$$

L'équation de la tangente à la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé en son point d'inflexion a pour équation :

a. $y = -e^{-2}x - 2e^{-2}$

c. $y = 3e^2x - 2e^2$

b. $y = -3e^{-4}x - 8e^{-4}$

d. $y = 5e^{-2}x - 8e^2$

31. La fonction f , définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2[2\ln(x) - 3]$$

est

a. concave sur $]0; 1[$, convexe sur $]1; +\infty[$

b. concave sur $]0; 1[$, convexe sur $]e; +\infty[$

b. convexe sur $]0; 1[$, concave sur $]1; +\infty[$

d. convexe sur $]0; e[$, concave sur $]e; +\infty[$

32. On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} =$

a. 0

c. $-\infty$

b. 1

d. $+\infty$

33. Soient u et v deux fonctions définies sur \mathbb{R} telles que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = +\infty$$

Sachant de plus que v est impaire, on peut affirmer que la fonction $f = v \circ u$, définie sur \mathbb{R} par $f(x) = v[u(x)]$ est telle que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

a. 0

c. $-\infty$

b. $+\infty$

d. Aucune de ces réponses n'est correcte

PRIMITIVES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

34. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{3}e^{2x+5} - 2$.

La primitive F de f sur \mathbb{R} dont la représentation graphique coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 3 a pour expression $F(x) =$

On a alors : $E(M) = a.ZI;i$.

41. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X et Y deux variables aléatoires telles que :

X suit la loi binomiale de paramètres n et $0, 1$;

Y suit la loi binomiale de paramètres n^2 et $0, 1$.

Quelle est la valeur de n sachant que $E(X + Y) = 2$?

- a. 1 b. c. 3 d. 4

42. Soient X_1, X_2, \dots, X_5 , cinq variables aléatoires telles que pour tout i entier tel que $1 \leq i \leq 5$, la variable aléatoire X_i suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(8; \frac{1}{2^i}\right)$.

On définit également la variable aléatoire M par :

$$M = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 X_i = \frac{1}{5} (X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5)$$

On a alors $E(M)$:

- a. $\frac{21}{20}$ b. $\frac{21}{40}$ c. $\frac{31}{40}$ d. $\frac{31}{20}$

43. Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ de paramètres n et p , avec $p \in]0; 1[$.

On peut alors affirmer que :

- a. $E(X) = pV(X)$ c. $E(X) = (1 - p)V(X)$
b. $V(X) = pE(X)$ d. $V(X) = (1 - p)E(X)$

ALGORITHMIQUE ET PROGRAMMATION

Pour les questions 44 à 45, on considère l'algorithme suivant :

Algorithme 1 : SUJET ZÉRO	
1	Variables
2	S nombre réel
3	N, I : entiers naturels non nuls
4	Traitement
5	Saisir N
6	$I \leftarrow 1$
7	$S \leftarrow 0$
8	Tant que $I \leq N$ faire
9	$S \leftarrow S + 1/I$
10	$I \leftarrow I + 1$
11	Afficher S

44. Pour une valeur saisie de N par l'utilisateur, que retourne cet algorithme?
- a. La somme des entiers de 1 à N
 - b. La somme des inverses des entiers de 1 à N
 - c. L'inverse de la somme des entiers de 1 à N
 - d. L'inverse de la somme des inverses des entiers de 1 à N
45. Pour une valeur saisie de N égale à 5, l'algorithme retourne une valeur comprise entre :
- a. 0 et 1
 - b. 1 et 2
 - c. 2 et 3
 - d. 3 et 4

☪ FIN ☪