CONCOURS AVENIR - ENTRAÎNEMENT 2009

DURÉE : 1 h 30 min

CONSIGNES SPÉCIFIQUES

Lire attentivement les consignes afin de vous placer dans les meilleures conditions de réussite de cette épreuve :
Cette épreuve comporte volontairement plus d'exercices que vous ne pouvez en traiter dans le temps imparti. La raison en est que votre enseignant n'a pas forcément traité l'ensemble du programme de Terminale S.
Vous devez répondre à 45 questions au choix parmi les 60 proposées pour obtenir la note maximale. Si vous traitez plus de 45 questions, seules les 45 premières seront prises en compte.

Aucun brouillon n'est distribué. Les pages blanches de ce sujet peuvent être utilisées à l'usage de brouillon.
L'usage de la calculatrice ou de tout autre appareil électronique est interdit.
Aucun document autre que ce sujet et sa grille réponse n'est autorisé.

Attention, il ne s'agit pas d'un examen mais bien d'un concours qui aboutit à un classement.
Si vous trouvez ce sujet « difficile », ne vous arrêtez pas en cours de composition, n'abandonnez pas, restez concentré(e). Les autres candidats rencontrent probablement les mêmes difficultés que vous !

Barème :
Afin d'éliminer les stratégies de réponses au hasard, **chaque réponse exacte est gratifiée de 3 points**, tandis que **chaque réponse fausse est pénalisée par le retrait d'un point**.

Concours AVENIR - Exercice d'entraînement de Mathématiques

ÉQUATIONS POLYNÔMIALES

Le nombre de solutions distinctes de l'équation $x^4 + 3x^2 = 0$:

1. dans $\mathbb{R}$ est :

a. 1

b. 2

c. 3

d. 0 ou 4.

2. dans $\mathbb{C}$ est :

a. 1

b. 2

c. 3

d. 0 ou 4.

LIMITES

3. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{-3x^2+6x}{2x^2-8} =$

a. $\dfrac{-3}{2}$

b. $\dfrac{3}{2}$

c. $\dfrac{-3}{4}$

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-2}{x^2} =$

a. $+\infty$

b. $-\infty$

c. n'existe pas

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

EXPONENTIELLE ET LOGARITHME

5. $2\ln(2) + \ln(27) + \ln\left(\dfrac{1}{4}\right) - \ln\left(\sqrt{3}\right) =$

a. $3\ln\left(29 + \dfrac{1}{4} - \sqrt{3}\right)$

b. $-2,5\ln(3)$

c. $5\ln\left(\sqrt{3}\right)$

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

6. $\mathrm{e}^{\ln(1)-\ln(2)+\ln(3)-\ln(4)+\ln(5)} =$

a. 3

b. $\dfrac{15}{8}$

c. $5!$

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

7. Pour tout réel $x \in]0\,;\,1[$:
   a. $[\ln(x)]^2 = 2\ln(x)$
   b. $[\ln(x)]^2 > 2\ln(x)$
   c. $[\ln(x)]^2 < 2\ln(x)$
   d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.
8. Pour tout réel $x \in]1\,;\,+\infty[$:
   a. $[\ln(x)]^2 = 2\ln(x)$
   b. $[\ln(x)]^2 > 2\ln(x)$
   c. $[\ln(x)]^2 < 2\ln(x)$
   d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

   Dans $\mathbb{R}$
9. L'équation $\mathrm{e}^{\ln(-x^2+7)} = -7 + x^2$ a pour ensemble de solutions :
   a. $S = \emptyset$
   b. $S = \{\sqrt{7}\}$
   c. $S = \{-\sqrt{7}\,;\,\sqrt{7}\}$
   d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.
10. L'équation $\ln\left(\mathrm{e}^{-x^2+7}\right) = -7 + x^2$ a pour solution :
   a. $S = \emptyset$
   b. $S = \{\sqrt{7}\}$
   c. $S = \{-\sqrt{7}\,;\,\sqrt{7}\}$
   d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.
11. L'ensemble des solutions de l'inéquation $(e - X - 1)\,(1 + x) \geqslant 0$ est :
   a. $[-1\,;\,0]$
   b. $]-\infty\,;\,-1] \cup [0\,;\,+\infty[$
   c. $[0\,;\,+\infty[$
   d. $]-\infty\,;\,-1]$

ÉTUDE DE FONCTIONS

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}$.

12. Sa fonction dérivée f' est alors définie sur $\mathbb{R}*$ par $f'(x) =$
   a. e^{x^2}
   b. $2x\mathrm{e}^{x^2}$
   c. $\dfrac{(x-1)\mathrm{e}^{x^2}}{x^2}$
   d. $\dfrac{\left(2x^2-1\right)\mathrm{e}^{x^2}}{x^2}$
13. f est strictement décroissante sur
   a. $\left[\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\,;\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$
   b. $\left[-1\,;\,\dfrac{-1}{2}\right]$
   c. $\left[\dfrac{-1}{2}\,;\,\dfrac{-1}{4}\right]$
   d. $\left[\dfrac{-1}{4}\,;\,\dfrac{-1}{2}\right]$

14. Sa courbe représentative dans un repère orthonormal est symétrique par rapport à

a. l'axe des abscisses

b. l'axe des ordonnées

c. l'origine

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

15. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$

a. $+\infty$

b. $-\infty$

c. n'existe pas

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

16. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) =$

a. $+\infty$

b. $-\infty$

c. n'existe pas

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

TRIGONOMÉTRIE

17. Pour tout réel x, $\cos(x+\pi) - \cos(x-\pi) + \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) =$

a. 0

b. $2\cos(x)$

c. $2\sin(x)$

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

Dans l'intervalle $[-\pi ; \pi]$,

18. l'équation $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 0$ a pour solution :

a. $S = \left\{\dfrac{-\pi}{4} ; \dfrac{3\pi}{4}\right\}$

b. $S = \left\{0 ; \dfrac{\pi}{2}\right\}$

c. $S = [-\pi ; \pi]$

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

19. l'équation $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ a pour solution :

a. $S = \left\{\dfrac{-\pi}{4} ; \dfrac{3\pi}{4}\right\}$

b. $S = \left\{0 ; \dfrac{\pi}{2}\right\}$

c. $S = [-\pi ; \pi]$

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

20. L'équation $\sin(x) + \cos(x) = 0$ a pour solution :

a. $S = \left\{\dfrac{-\pi}{4} ; \dfrac{3\pi}{4}\right\}$

b. $S = \left\{0 ; \dfrac{\pi}{2}\right\}$

c. $S = [-\pi ; \pi]$

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

21. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos^3\left(\dfrac{x}{2}\right)$ est :

a. paire et 2π périodique

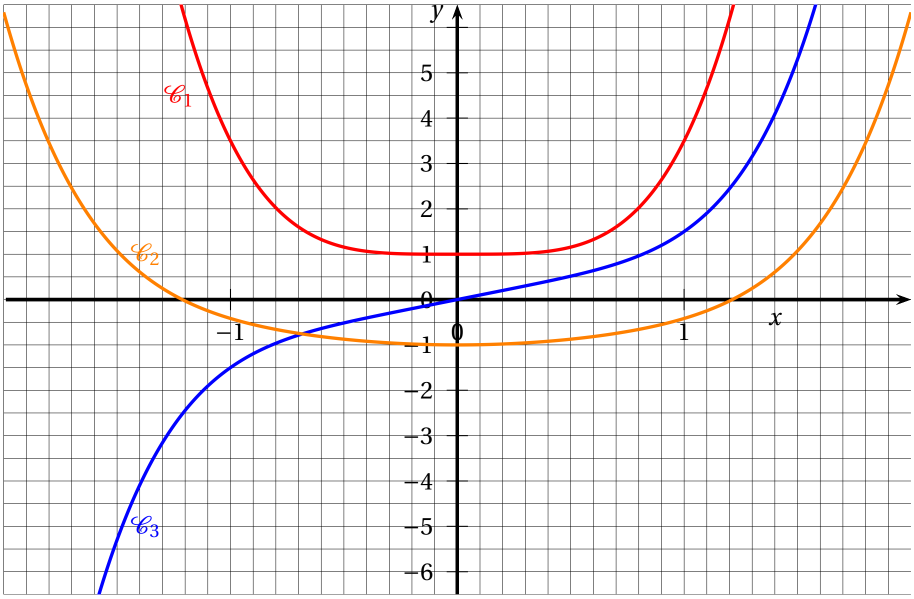
b. impaire et 2π périodique

c. paire et 4π périodique

d. impaire et 4π périodique

ANALYSE DE COURBES

22. $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ sont les courbes représentatives d'une fonction f, de sa dérivée f' et d'une de ses primitives F.



$\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ sont respectivement les courbes représentatives de :

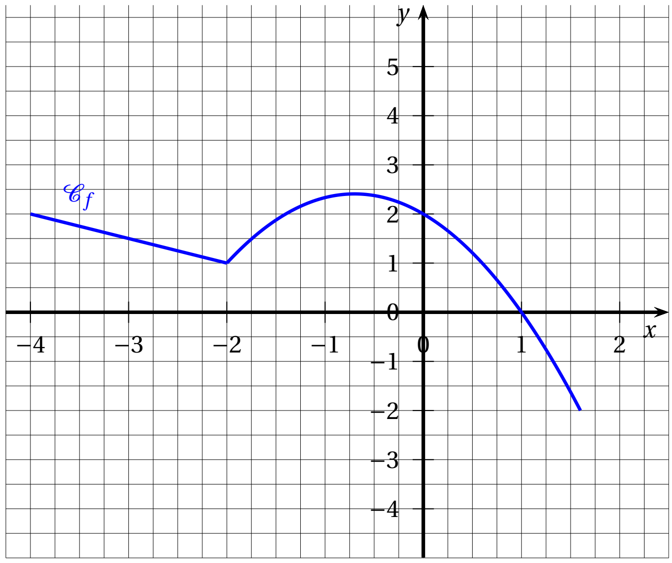
a. f, f' et F

b. f', f et F

c. F, f' et f

d. f', F et f.

Soit la courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous représentant une fonction f



23. La fonction f :

a. est dérivable en -2 et en -1

b. est dérivable en -2 mais pas en -1

c. est dérivable en -1 mais pas en -2

d. n'est dérivable ni en -2 ni en -1

24. $\displaystyle\lim_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} \frac{f(x) - f(-2)}{x+2} =$

a. $\dfrac{-1}{2}$

b. -2

c. n'existe pas

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

25. $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} =$

a. $-\infty$

b. $+\infty$

c. -3

d. -6

LOGIQUE - ARITHMETIQUE - . . .

26. La somme de tous les diviseurs entiers positifs de 48 est égale à :

a. 123

b. 124

c. 76

d. Aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

27. Dans une classe de Terminale S de 35 élèves qui sont chacun des filles ou des garçons, des internes ou des externes on considère les deux propositions suivantes :

A : « Tout garçon est interne » et

B : « Il existe une fille interne »

Laquelle de ces propositions est exacte :

- **a.** Si A est fausse alors B est nécessairement vraie.
- **b.** Si B est vraie alors A est nécessairement fausse.
- **c.** Pour prouver que B est fausse il est nécessaire de vérifier que toutes les filles sont externes.
- **d.** pour prouver que A est fausse il suffit de trouver un garçon externe.

28. Dans un groupe de 8 sportifs,

- **a.** on peut former autant d'équipes différentes de 3 que de 6 joueurs.
- **b.** on peut former plus d'équipes différentes de 6 que de 3 joueurs.
- **c.** on peut former plus d'équipes différentes de 3 que de 6 joueurs.
- **d.** aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

29. Sur $\mathbb{R}^-$, $\sqrt{-x^3} =$

- **a.** $x\sqrt{x}$
- **b.** $-x\sqrt{x}$
- **c.** $x\sqrt{-x}$
- **d.** $-x\sqrt{-x}$

30. Sachant que $-3 \leqslant x \leqslant -1$, le maximum de $x + \dfrac{4}{x}$ est alors égal à

- **a.** -5
- **b.** $\dfrac{-7}{3}$
- **c.** -4
- **d.** $\dfrac{-13}{3}$

TANGENTES

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1+x)^4$ et T_0 et T_1 les tangentes respectives à sa courbe représentative aux points d'abscisses 0 et -2.

31. T_1 a pour équation réduite :

- **a.** $y = 1$
- **b.** $y = x - 2$
- **c.** $y = 4x + 9$
- **d.** aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

32. T_0 et T_1 se coupent alors au point de coordonnées :

- **a.** $(-1\,;\,-3)$
- **b.** $(0\,;\,0)$
- **c.** (-3 ; -1)
- **d.** T_0 et T_1 sont parallèles.

SUITES

33. La suite (U_n) définie par $U_n = \sin[(-2)^n n\pi]$

- **a.** est convergente
- **b.** diverge vers $-\infty$
- **c.** diverge vers $+\infty$
- **d.** diverge sans limite

34. Soit la suite arithmétique (U_n) telle que $U_{12} = 7$ et $U_{21} = -6$ alors $U_3 =$

a. $\dfrac{-13}{9}$

b. -20

c. 20

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

35. Soient (U_n), (V_n) et (W_n) trois suites telles que pour tout $n \geqslant 2009 \quad U_n < V_n < W_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = 2$ alors :

a. (V_n) est obligatoirement minorée par -2010 et majorée par 2010.

b. (V_n) peut être divergente.

c. (V_n) converge forcément vers un réel appartenant à $]-1\ ;\ 2[$.

d. (V_n) converge forcément vers un réel appartenant à $[-1\ ;\ 2]$.

NOMBRES COMPLEXES

Soient z_1 et z_2 les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $-2z^2 + 3z - \dfrac{25}{8} = 0$

36. $|z_1 z_2| =$

a. $\dfrac{3}{2}$

b. $\dfrac{25}{4}$

c. $\dfrac{9}{16}$

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

37. $\arg(z_1) =$

a. $\arg(z_2)$

b. $-\arg(z_2)$

c. $\pi - \arg(z_2)$

d. $\pi + \arg(z_2)$

38. Le nombre complexe $z = (1-\text{i})^{10}$ est :

a. un réel strictement positif

b. un réel strictement négatif

c. un imaginaire pur

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

39. À tout complexe $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $z = x + \text{i}y$ où $(x\ ;\ y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ on associe le nombre complexe $z' = \dfrac{1}{z}$.
L'écriture algébrique de z' est :

a. $\dfrac{x}{x^2+y^2} + \text{i}\dfrac{y}{x^2+y^2}$

b. $\dfrac{x}{x^2+y^2} - \text{i}\dfrac{y}{x^2+y^2}$

c. $\dfrac{y}{x^2+y^2} + \text{i}\dfrac{x}{x^2+y^2}$

d. $\dfrac{y}{x^2+y^2} - \text{i}\dfrac{x}{x^2+y^2}$

40. Dans un repère orthonormal direct du plan complexe, la transformation qui à tout point d'affixe z associe le point d'affixe $(1-\mathrm{i})z$ est une :

a. translation

b. rotation

c. homothétie

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

41. La forme exponentielle de $-3\left[\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right]$ est :

a. $-3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{7}}$

b. $3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{7}}$

c. $3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{6\pi}{7}}$

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

PROBABILITÉS

42. A et B étant deux évènements indépendants tels que $P(A) = 0,3$ et $P(A \cup B) = 0,65$; on a ainsi $P(B) =$

a. $0,5$

b. 1

c. $0,05$

d. $0,7$

43. X étant une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\{-1\ ;\ 1\ ;\ 2\}$ telle que $P(X=-1) = 0,3$ et $P(X=1) = 0,5$, son espérance mathématique est alors égale à :

a. 0,2

b. 0,4

c. 0,6

d. 0,8

A et B étant deux évènements tels que $P(A) = \frac{1}{4}$; $P(B) = \frac{3}{5}$ et $P_{\overline{A}}(B) = \frac{2}{3}$

44. on a ainsi $P_A(B) =$

a. $\frac{1}{3}$

b. $\frac{2}{5}$

c. $\frac{3}{5}$

d. $\frac{2}{3}$

45. et $P_B\left(\overline{A}\right) =$

a. $\frac{4}{6}$

b. $\frac{5}{6}$

c. $\frac{6}{6}$

d. $\frac{7}{6}$

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

46. Sachant que dans un repère orthonormal, les points A, B et C ont pour coordonnées A$(-1\ ;\ 1)$; B$(1\ ;0)$; C$(-2\ ;\ -1)$, on peut alors affirmer que le triangle ABC est :

a. rectangle non isocèle

b. isocèle non rectangle

c. rectangle isocèle

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

Dans un repère orthonormal de l'espace

47. $x^2+(y-1)^2=4$ est une équation

a. d'un cercle

b. d'une sphère

c. d'un plan

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

48. $3x-7z=4$ est une équation

a. d'une droite

b. d'un plan

c. d'un cercle

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ on considère les points A$(0\ ;\ 1\ ;\ 4)$; B$(1\ ;\ -1\ ;\ 0)$; C$(3\ ;\ 0\ ;\ -3)$, D$(-6\ ;\ 3\ ;\ 18)$.

49. Ainsi :

a. A, B et D sont alignés

b. A, C et D sont alignés

c. B, C et D sont alignés

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

50. Les points A, B et C appartiennent tous trois :

a. à une même droite

b. au plan d'équation $8x+6y-z=2$

c. au plan d'équation $-3x+y-z=-3$

d. au plan d'équation $2x-y+z=3$

51. Par ailleurs,

a. AD > BC

b. AD < BC

c. AD = BC

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

52. De plus, la distance du point O au plan (ABC) est égale à :

a. 0

b. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

c. $\dfrac{3\sqrt{11}}{11}$

d. $\dfrac{2\sqrt{101}}{101}$

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

53. La solution de l'équation différentielle $y = 2y' - 4$ telle que $y(0) = -1$ est

a. $y(x) = -3\mathrm{e}^{2x} + 2$

b. $y(x) = \mathrm{e}^{2x} - 2$

c. $y(x) = 3\mathrm{e}^{0,5x} - 4$

d. $y(x) = -5\mathrm{e}^{0,5x} + 4$

54. La solution de l'équation différentielle $y' + 2y = 4x$ telle que $y(0) = -1$ est

a. $y(x) = -\mathrm{e}^{-2x} + 2x$

b. $y(x) = 2x - 1$

c. $y(x) = -2\mathrm{e}^{-2x} + 2x + 1$

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

INTÉGRATION

55. Une primitive sur $\left]\dfrac{\pi}{2}\,;\,\pi\right[$ de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ est définie par $F(x) =$

a. $-\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

b. $\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

c. $\ln[\sin(x)]$

d. $-\ln[\sin(x)]$

56. $\displaystyle\int_{-2}^{2} x\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x =$

a. 0

b. $\mathrm{e}^{2} - 3\mathrm{e}^{-2}$

c. $\mathrm{e}^{2} + 3\mathrm{e}^{-2}$

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

57. Sur $\mathbb{R}$, la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} \dfrac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est :

a. croissante

b. décroissante

c. non monotone

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

58. Soit (I_n) la suite définie par $I_n = \displaystyle\int_{-0,5}^{0,5} x^n\,\mathrm{d}x$.

a. (I_n) est convergente.

b. (I_n) est monotone.

c. pour tout $n \in \mathbb{N} \quad I_n > 0$.

d. pour tout $n \in \mathbb{N} \quad I_n < 0$.

59. Dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm, l'aire du domaine délimité par les droites d'équations $x = -2$ et $x = 2$, l'axe des abscisses et la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto x^3$ est égale, en cm^2 à :

a. 0

b. 8

c. 16

d. 32

FIN DE L'ÉPREUVE