☙ Baccalauréat ES spécialité ☙

Index des exercices avec des graphes de 2006 à 2016

Tapuscrit : Guillaume Seguin

N°	Lieu et date	chaine eulerienne	nombre chromatique	matrice	chaîne minimale	graphe orienté	graphe probabiliste	suite	état stable	autre
1	Antilles juin 2016	×			×	×			×	
2	Asie 2016	×		×	×					
3	Pondichery 2016						×	×		système + algo à compléte
4	Liban 2016						×	×		inéquation
5	Polynésie juin 2016	×		×	×				×	V/F + matrice
6	Métropole juin 2016						×	×	×	
7	Centres étrangers 2016	×		×	×					
8	Amerique du nord 2016						×	×		2 algos + inéq
9	Polynésie sept 2015	×			×		×			
10	Métropole sept 2015						×	×	×	écrire algo
11	Nouvelle Calédonie nov 2015						×	×		algo + limite
12	Antilles sept 2015				×					algo (non commun)
13	Amérique du Sud nov 2015						×	×	×	algo
14	Antilles 2015						×		×	
15	Asie 2015	×		×	×					
16	Métropole 2015	×		×	×					
17	Polynésie 2015						×		×	résol. système
18	Centres étrangers 2015	×		×	×					
19	Amérique du nord 2015	×								résol système
20	Liban 2015						×	×	×	algo
21	Pondichery 2015						×		×	
22	Nouvelle Calédonie mars 2015	×			×		×		×	
23	Nouvelle Calédonie nov 2014	×		×						résolution système
24	Amérique du sud nov 2014						×	×	×	algo
25	Polynésie sept 2014	×		×		×				
26	Métropole sept 2014						×		×	3 sommets
27	Antilles sept 2014	×			×		×			
28	Pondichery 2014						×	×		résol. système + algo
29	Polynésie juin 2014	×		×	×	×				
30	Métropole 2014						×	×		algo
31	Centres Etrangers 2014	×		×	×					
32	Asie juin 2014				×		×		×	
33	Antilles juin 2014						×		×	algo
34	Liban mai 2014	×		×	×					
35	Amérique du Nord 2014									
36	Nouvelle Calédonie mars 2014						×		×	
37	Nouvelle Calédonie nov 2013						×	×		résolution equat
38	Amérique du sud nov 2013				×		×	×	×	algorithme
39	Métropole sept 2013	×			×		×		×	
40	Antilles sept 2013		×				×		×	
41	Pondichery avril 2013	×		×	×					
42	Polynésie juin 2013						×		×	résolution système
43	Métropole juin 2013				×		×			
44	Métropole dévoilé juin 2013						×	×	×	algorithme
45	Liban mai 2013	×		×	×					
46	Centres étrangers juin 2013	×		×	×					
47	Asie juin 2013			×	×	×				
48	Antilles juin 2013	×		×	×					
49	Amérique du Sud mai 2013						×	×	×	limite
50	Polynésie sept 2012						×		×	
51	Nouvelle Caledonie nov 2012						×		×	
52	Amerique du Sud nov 2012						×		×	
53	Antilles sept 2012						×	×	×	limite
54	Polynésie juin 2012				×		×		×	
55	Métropole juin 2012						×		×	
56	Liban mai 2012						×	×	×	résolut équ puiss
57	Etranger juin 2012						×	×	×	

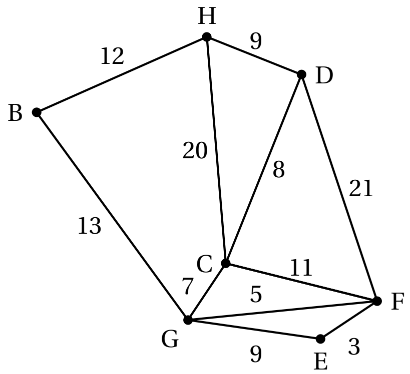
N°	Lieu et date	chaîne eulérienne	nombre chroma.	matrice	chaîne minimale	graphe orienté	graphe probabiliste	suite	état stable	autre
58	Asie juin 2012	×		×	×					
59	Antilles juin 2012						×	×	×	
60	Amerique du Nord mai 2012						×	×	×	
61	Pondichery avril 2012	×	×	×	×					
62	Nouvelle Calédonie nov 2011		×							graphe à faire
63	Amerique du Sud nov 2011						×	×	×	limite
64	Polynesie sept 2011		×				×		×	
65	Liban mai 2011						×	×	×	limite
66	Métropole juin 2011			×			×			matrice 3*3
67	Asie juin 2011	×	×		×					
68	Polynésie juin 2011	×		×	×					
69	Amerique du Nord juin 2011	×	×				×	×	×	
70	Pondichery avril 2011	×		×	×					
71	Amérique du Nord juin 2010						×	×		limite
72	Antilles juin 2010						×	×	×	limite
73	La Réunion juin 2010						×	×		**surface**
74	Polynésie juin 2010						×	×	×	limite
75	Liban mai 2010						×	×		résolut équ puiss
76	Pondichéry avril 2010	×	×							
77	Nouvelle Calédonie nov 2009						×	×	×	limite
78	Antilles sept 2009						×	×	×	limite
79	Polynésie sept 2009						×	×	×	limite
80	Amérique du Nord juin 2009	×	×		×					
81	Asie juin 2009						×		×	
82	Centres Etrangers juin 2009						×	×	×	limite
83	Antilles juin 2009	×	×	×						
84	Métropole juin 2009	×	×		×					
85	Pondichéry avril 2009	×			×					
86	Amérique du Sud nov 2008				×		×		×	
87	Nouvelle Calédonie 2008	×	×	×	×					
88	Métropole sept 2008						×	×		loi binomiale
89	Antilles juin 2008						×	×		limite
90	Métropole juin 2008						×	×	×	
91	La Réunion juin 2008						×	×	×	limite
92	Polynésie juin 2008	×		×	×					
93	Amérique du Nord mai 2008						×			matrice 3*3
94	Nouvelle Calédonie nov 2007	×		×	×					
95	La Réunion sept 2007	×		×		×				
96	Asie juin 2007	×	×							
97	Centres Etrangers juin 2007	×	×		×					
98	Amérique du Nord mai 2007	×	×							
99	Liban mai 2007	×	×	×						
100	Nouvelle Calédonie mars 2007						×	×	×	limite
101	Amérique du Sud nov 2006		×	×	×					
102	Antilles sept 2006						×	×	×	limite
103	Nouvelle Calédonie nov 2006						×	×		
104	Polynésie sept 2006						×	×	×	limite
105	Liban mai 2006	×	×	×		×				
106	Amérique du Nord juin 2004	×	×	×						
107	La Réunion juin 2004		×	×	×					
108	Métropole 2004	×			×					
109	Asie 2003	×		×	×	×				
110	La Réunion 2003	×	×	×	×					
111	Centre Etrangers 2003		×	×	×	×				
112	sujet bac 1		×							
113	Antilles juin 2003	×	×	×						
114	Métropole juin2003		×	×						

1. Antilles juin 2016

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Des touristes sont logés dans un hôtel H.
Un guide souhaite faire visiter la région à ces touristes en empruntant les routes signalées comme d'intérêt touristique par l'office du tourisme.
Les tronçons de route qu'il souhaite emprunter sont représentés sur le graphe ci-contre.
Le long de chaque arête figure la distance en kilomètres des différents tronçons.



1. (a) Le guide peut-il emprunter tous les tronçons de route en passant une et une seule fois sur chacun d'eux, en partant de l'hôtel et en y revenant ? Justifier la réponse.

   (b) Le guide peut-il emprunter tous les tronçons de route en passant une et une seule fois sur chacun d'eux, en partant de l'hôtel mais sans forcément y revenir ? Justifier la réponse.
2. Un musée est situé en E. Déterminer le plus court chemin menant de l'hôtel H au musée E. Justifier la réponse.

Partie B

L'office de tourisme évalue chaque année les hôtels de sa région et répertorie les meilleurs sur son site internet. On admet que dans cette région, la création ou la disparition d'hôtels est négligeable. On constate que, chaque année :

- 10 % des hôtels répertoriés ne seront plus répertoriés l'année suivante ;
- 20 % des hôtels non répertoriés sur le site seront répertoriés l'année suivante.

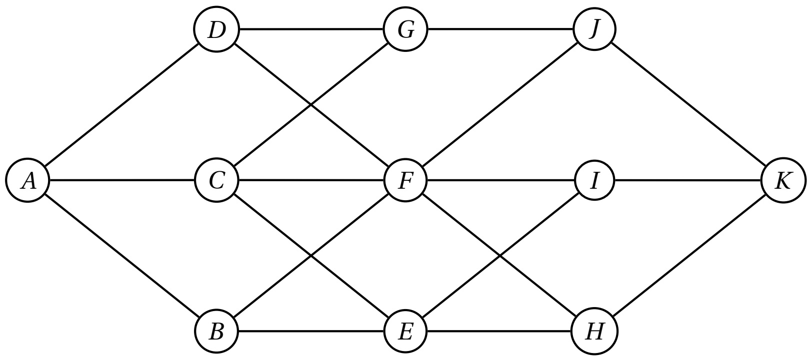
1. Réaliser un graphe décrivant cette situation (on notera R l'évènement « l'hôtel est répertorié » et $\overline{R}$ son évènement contraire).
2. Écrire la matrice de transition de ce graphe.
3. En 2015, 30 % des hôtels de la région étaient répertoriés.
   Quel pourcentage d'hôtels sera répertorié en 2016 ? en 2017 ?
4. Quel pourcentage d'hôtel serait répertorié à long terme ?

retour au tableau

2. Asie 2016

PARTIE A

On considère le graphe $\mathcal{G}$ ci-dessous



1. En justifiant la réponse, dire si ce graphe admet une chaîne eulérienne.
   Si oui, donner une telle chaîne.
2. On considère la matrice M ci-après (a, b, c et d sont des nombres réels).

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Déterminer les réels a, b, c et d pour que la matrice M représente la matrice d'adjacence associée au graphe $\mathcal{G}$, les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique.

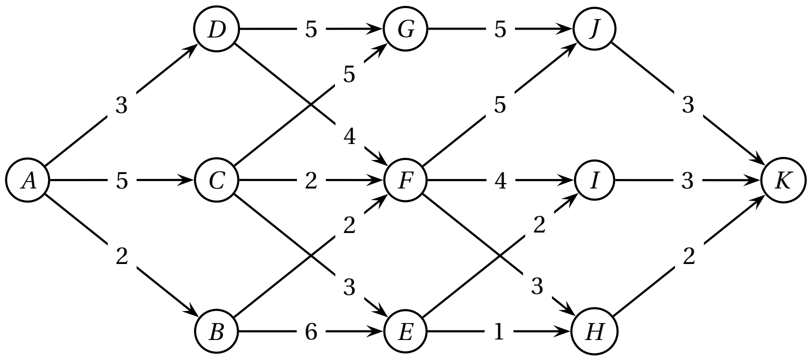
   (b) On donne

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 10 & 8 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 5 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 10 & 13 & 6 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 11 & 16 & 9 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 7 & 12 & 8 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 10 & 11 & 7 & 0 & 0 & 0 & 10 & 10 & 7 & 0 \\ 0 & 13 & 16 & 12 & 0 & 0 & 0 & 13 & 13 & 12 & 0 \\ 0 & 6 & 9 & 8 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 7 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 10 & 13 & 5 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 10 & 13 & 5 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 7 & 12 & 7 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & 6 & 4 & 0 & 0 & 0 & 8 & 8 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

   Déterminer, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 reliant A à J. Préciser ces chemins.

PARTIE B

On oriente et on pondère le graphe $\mathcal{G}$ ci-dessus pour qu'il représente un réseau d'irrigation.



- Le sommet A correspond au départ d'eau, le sommet K au bassin d'infiltration et les autres sommets représentent les stations de régulation.
- Les arêtes représentent les canaux d'irrigation et les flèches, le sens du ruissellement.
- La pondération donne, en km, les distances entre les différentes stations du réseau.

Déterminer un chemin de longueur minimale entre le départ d'eau en A et le bassin d'infiltration en K et donner sa longueur.
retour au tableau

3. Pondichery 2016

Une étude statistique sur une population d'acheteurs a montré que :

- 90 % des personnes qui ont fait leur dernier achat en utilisant internet affirment vouloir continuer à utiliser internet pour faire le suivant. Les autres personnes comptent faire leur prochain achat en magasin ;
- 60 % des personnes qui ont fait leur dernier achat en magasin affirment vouloir continuer à effectuer le suivant en magasin. Les autres comptent effectuer leur prochain achat en utilisant internet.

Dans toute la suite de l'exercice, n désigne un entier naturel non nul. Une personne est choisie au hasard parmi les acheteurs. On note :

- a_n la probabilité que cette personne fasse son n-ième achat sur internet ;
- b_n la probabilité que cette personne fasse son n-ième achat en magasin.

On suppose de plus que $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$.
On note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & bn \end{pmatrix}$ l'état probabiliste correspondant au n-ième achat. Ainsi $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.
On note :

- A l'état : « La personne effectue son achat sur internet » ;
- B l'état : « La personne effectue son achat en magasin ».

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.
2. Écrire la matrice de transition M associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique.
3. (a) Calculer la matrice M^4.
   (b) En déduire que la probabilité que la personne interrogée fasse son 5$^{\text{e}}$ achat sur internet est égale à 0,812 5.
4. On note $P = (a \quad b)$ l'état stable associé à ce graphe.
   (a) Montrer que les nombres a et b sont solutions du système :
   $$\left\{\begin{array}{rcrcl} 0,1a & - & 0,4b & = & 0 \\ a & + & b & = & 1 \end{array}\right.$$
   (b) Résoudre le système précédent.
   (c) À long terme, quelle est la probabilité que cette personne fasse ses achats sur internet ?
5. (a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :
   $$a_{n+1} = 0,5a_n + 0,4$$
   (b) Recopier et compléter l'algorithme suivant afin qu'il affiche le plus petit entier naturel n non nul tel que $a_n \leqslant 0,801$.

Variables :	N est un entier naturel A est un nombre réel
Initialisation :	Affecter à N la valeur 1 Affecter à A la valeur 1
Traitement :	Tant que ... Affecter à A la valeur $0,5 \times A + 0,4$ Affecter à N la valeur .... Fin Tant que
Sortie :	Afficher N

   (c) Quelle est la valeur affichée par l'algorithme en sortie ?

retour au tableau

4. Liban mai 2016

L'entreprise PiscinePlus, implantée dans le sud de la France, propose des contrats annuels d'entretien aux propriétaires de piscines privées.
C'est la seule entreprise dans les environs. Aussi, les propriétaires de piscines n'ont que deux choix possibles : soit ils s'occupent eux-mêmes de l'entretien de leur piscine, soit ils souscrivent un contrat avec l'entreprise PiscinePlus.
On admet que le nombre de propriétaires de piscines est constant.
Le patron de cette entreprise remarque que chaque année :

- 12 % des particuliers qui entretenaient eux-mêmes leur piscine décident de souscrire un contrat avec l'entreprise PiscinePlus ;
- 20 % de particuliers sous contrat avec l'entreprise PiscinePlus décident de le résilier pour entretenir eux-mêmes leur piscine.

Cette situation peut être modélisée par un graphe probabiliste de sommets C et L où :

- C est l'évènement « Le particulier est sous contrat avec l'entreprise PiscinePlus » ;
- L est l'évènement « Le particulier effectue lui-même l'entretien de sa piscine ».

Chaque année, on choisit au hasard un particulier possédant une piscine et on note pour tout entier naturel n :

- c_n la probabilité que ce particulier soit sous contrat avec l'entreprise PiscinePlus l'année $2015+n$;
- l_n la probabilité que ce particulier entretienne lui-même sa piscine l'année $2015+n$.

On note $P_n = \begin{pmatrix} c_n & l_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne de l'état probabiliste pour l'année $2015+n$.
Dans cet exercice, on se propose de savoir si l'entreprise PiscinePlus atteindra l'objectif d'avoir au moins 35 % des propriétaires de piscines comme clients sous contrat d'entretien.

Partie A

1. Dessiner le graphe probabiliste représentant cette situation et donner la matrice de transition associée au graphe dont les sommets sont pris dans l'ordre C et L.
2. (a) Montrer que l'état stable de ce graphe est $P = \begin{pmatrix} 0,375 & 0,625 \end{pmatrix}$.
   (b) Déterminer, en justifiant, si l'entreprise PiscinePlus peut espérer atteindre son objectif.

Partie B

En 2015, on sait que 15 % des propriétaires de piscines étaient sous contrat avec l'entreprise PiscinePlus. On a ainsi $P_0 = \begin{pmatrix} 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $c_{n+1} = 0,68c_n + 0,12$.
2. À l'aide d'un algorithme, on cherche à connaître au bout de combien d'années l'entreprise PiscinePlus atteindra son objectif :

L1	Variables :	n est un nombre entier naturel
L2		C est un nombre réel
L3	Traitement :	Affecter à n la valeur 0
L4		Affecter à C la valeur $0,15$
L5		Tant que $C < 0,35$ faire
L6		n prend la valeur $n+1$
L7		C prend la valeur $0,68C + 0,12$
L8		Fin Tant que
L9	Sortie :	Afficher n

   (a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous, en ajoutant autant de colonnes que nécessaire pour permettre la réalisation de l'algorithme ci-dessus. On arrondira les résultats au millième.

Valeur de n	0		
Valeur de C	0,15		

(b) Donner la valeur affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme puis interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

3. On rappelle que, pour tout entier naturel n, on a $c_{n+1} = 0,68c_n + 0,12$ et que $c_0 = 0,15$.
   On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = c_n - 0,375$.

   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. En préciser la raison et le premier terme.
   On admet que, pour tout entier naturel n, on a $c_n = -0,225 \times 0,68^n + 0,375$.

   (b) Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $c_n \geqslant 0,35$.

   (c) Quel résultat de la question 2. retrouve-t-on ?

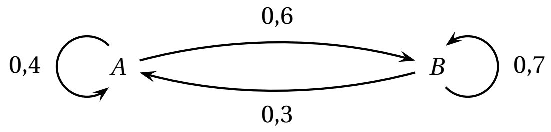
retour au tableau

5. Polynésie juin 2016

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

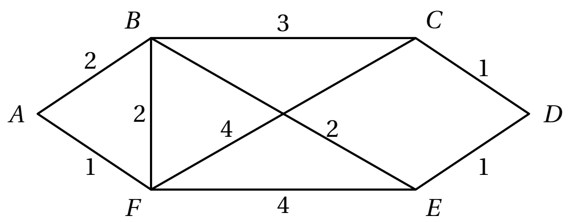
Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes

1. On donne le graphe probabiliste suivant :



Affirmation A : L'état stable associé à ce graphe est $\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

2. On donne le graphe pondéré G suivant :



Affirmation B : Il existe une chaîne passant une et une seule fois par toutes les arêtes de ce graphe.

Affirmation C : La plus courte chaîne entre les sommets A et D est une chaîne de poids 5.

3. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On suppose que M est la matrice d'adjacence d'un graphe à quatre sommets A, B, C, D dans cet ordre.

Affirmation D : Il existe exactement 3 chaînes de longueur 4 reliant le sommet B au sommet D.

4. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Affirmation E : Il existe un nombre réel a pour lequel B est l'inverse de A.

retour au tableau

6. Métropole juin 2016

Afin de se préparer à courir des marathons, Hugo aimerait effectuer quotidiennement un footing à compter du 1er janvier 2014. On admet que :

- Si Hugo court un jour donné, la probabilité qu'il ne coure pas le lendemain est de 0,2 ;
- s'il ne court pas un jour donné, la probabilité qu'il ne coure pas le lendemain est de 0,4.

On note C l'état « Hugo court » et R l'état « Hugo ne court pas ». Pour tout entier naturel n, on note :

- c_n la probabilité de l'évènement « Hugo court le $(n+1)$-ième jour » ;
- r_n la probabilité de l'évènement « Hugo ne court pas le $(n+1)$-ième jour » ;
- P_n la matrice $\begin{pmatrix} c_n & r_n \end{pmatrix}$ correspondant à l'état probabiliste le $(n+1)$-ième jour.

Le 1er janvier 2014, motivé, le jeune homme court. On a donc : $P_0 = \begin{pmatrix} c_0 & r_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

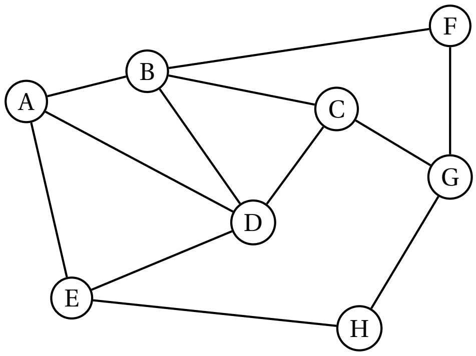
1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets C et R.
2. Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.
3. On donne $M^6 = \begin{pmatrix} 0{,}750\,016 & 0{,}249\,984 \\ 0{,}749\,952 & 0{,}250\,048 \end{pmatrix}$.
   Quel calcul matriciel permet de déterminer la probabilité c_6 qu'Hugo coure le 7e jour ?
   Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de c_6.
4. (a) Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n, $c_{n+1} = 0,2c_n + 0,6$.
5. Pour tout entier naturel n, on considère la suite (v_n) définie par $v_n = c_n - 0,75$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,2$. Préciser le premier terme.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n.
   Déterminer la limite de la suite (v_n).
   (c) Justifier que, pour tout entier naturel n, $c_n = 0,75 + 0,25 \times 0,2^n$.
   (d) Que peut-on conjecturer concernant la probabilité qu'Hugo coure le 29 décembre 2014 ?
   (e) Conjecturer alors l'état stable de ce graphe.
   Comment valider votre conjecture ?

retour au tableau

7. Centres etrangers 2016

Une compagnie aérienne utilise huit aéroports que l'on nomme A, B, C, D, E, F, G et H.
Entre certains de ces aéroports, la compagnie propose des vols dans les deux sens.
Cette situation est représentée par le graphe Γ ci-contre, dans lequel :

- les sommets représentent les aéroports,
- les arêtes représentent les liaisons assurées dans les deux sens par la compagnie.



Partie A

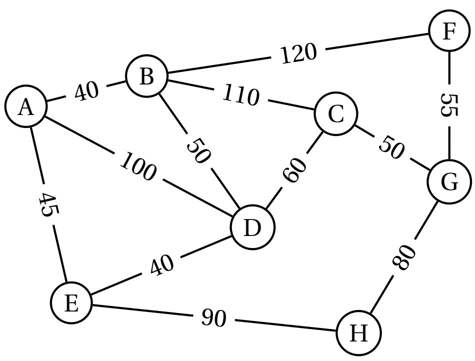
1. (a) Déterminer, en justifiant, si le graphe Γ est complet.
   (b) Déterminer, en justifiant, si le graphe Γ est connexe.
2. Déterminer, en justifiant, si le graphe Γ admet une chaîne eulérienne. Si oui, donner une telle chaîne.
3. Donner la matrice d'adjacence M du graphe Γ en respectant l'ordre alphabétique des sommets du graphe.
4. Pour la suite de l'exercice, on donne les matrices suivantes :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3&1&2&2&1&1&0&1\\ 1&4&1&2&2&0&2&0\\ 2&1&3&1&1&2&0&1\\ 2&2&1&4&1&1&1&1\\ 1&2&1&1&3&0&1&0\\ 1&0&2&1&0&2&0&1\\ 0&2&0&1&1&0&3&0\\ 1&0&1&1&0&1&0&2 \end{pmatrix} \text{ et } M^3 = \begin{pmatrix} 4&8&3&7&6&1&4&1\\ 8&4&8&8&3&6&1&4\\ 3&8&2&7&4&1&6&1\\ 7&8&7&6&7&3&3&2\\ 6&3&4&7&2&3&1&4\\ 1&6&1&3&3&0&5&0\\ 4&1&6&3&1&5&0&4\\ 1&4&1&2&4&0&4&0 \end{pmatrix}$$

   Un voyageur souhaite aller de l'aéroport B à l'aéroport H.
   (a) Déterminer le nombre minimal de vols qu'il doit prendre, Justifier les réponses à l'aide des matrices données ci-dessus.
   (b) Donner tous les trajets possibles empruntant trois vols successifs.

Partie B

Les arêtes sont maintenant pondérées par le coût de chaque vol, exprimé en euros.
Un voyageur partant de l'aéroport A doit se rendre à l'aéroport G.
En utilisant l'algorithme de Dijkstra, déterminer le trajet le moins cher.



retour au tableau

8. Amerique du Nord 2016

Un groupe de presse édite un magazine qu'il propose en abonnement.
Jusqu'en 2010, ce magazine était proposé uniquement sous forme papier. Depuis 2011, les abonnés du magazine ont le choix entre la version numérique et la version papier.
Une étude a montré que, chaque année, certains abonnés changent d'avis : 10 % des abonnés à la version papier passent à la version numérique et 6 % des abonnés à la version numérique passent à la version papier.
On admet que le nombre global d'abonnés reste constant dans le temps.
Pour tout nombre entier naturel n, on note :

a_n la probabilité qu'un abonné pris au hasard ait choisi la version papier l'année $2010+n$;

b_n la probabilité qu'un abonné pris au hasard ait choisi la version numérique l'année $2010+n$;

$P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice correspondant à l'état probabiliste de l'année $2010+n$.

On a donc $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. (a) Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B où le sommet A représente l'état « abonné à la version papier » et B l'état « abonné à la version numérique ».
   (b) Déterminer la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre A, B des sommets.
   (c) Montrer que $P_1 = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}$.
2. On admet que, pour tout entier naturel n, on a $a_{n+1} = 0,9a_n + 0,06b_n$ et $b_{n+1} = 0,1a_n + 0,94b_n$.
   Le directeur du groupe de presse souhaite visualiser l'évolution des deux types d'abonnements. Pour cela, on lui propose les deux algorithmes suivants :

Algorithme 1

```
Entrée
Saisir n
Traitement
a prend la valeur 1
b prend la valeur 0
Pour i allant de 1 à n
    a prend la valeur 0,9 × a + 0,06 × b
    b prend la valeur 0,1 × a + 0,94 × b
    Afficher a et b
Fin Pour
```

Algorithme 2

```
Entrée
Saisir n
Traitement
a prend la valeur 1
b prend la valeur 0
Pour i allant de 1 à n
    c prend la valeur a
    a prend la valeur 0,9 × a + 0,06 × b
    b prend la valeur 0,1 × c + 0,94 × b
    Afficher a et b
Fin Pour
```

   Sachant qu'un seul des algorithmes proposés permet de répondre au souhait du directeur, préciser lequel en justifiant la réponse.
3. (a) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $a_{n+1} = 0,84a_n + 0,06$.
   (b) On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = a_n - 0,375$.
   Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,84 et calculer u_0.
   (c) Donner l'expression de u_n en fonction de n.
   En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $a_n = 0,375 + 0,625 \times 0,84^n$.
4. En résolvant une inéquation, déterminer l'année à partir de laquelle la proportion d'abonnés à la version papier du magazine devient inférieure à 50 %.

retour au tableau

9. Polynésie sept 2015

Dans un plan de lutte contre la pollution urbaine, une municipalité a décidé de réduire l'utilisation des automobiles en ville en instaurant une taxe pour les automobiles circulant dans une zone du centre ville appelée ZTL (Zone à Trafic Limité) et de développer un réseau de navettes.

Partie A

L'objectif affiché par la municipalité est de réduire de moitié la présence des automobiles dans la zone ZTL, dans les deux ans à venir.
Initialement, 40 % des automobiles circulant dans la ville, circulaient dans cette zone ZTL. Suite à l'instauration de la taxe, l'évolution du trafic dans la ville a été suivie mois après mois.
L'étude a révélé que, parmi les automobiles circulant dans la ville :

* 3 % des automobiles circulant dans la zone ZTL n'y circulaient plus le mois suivant.
* 0,2 % des automobiles qui ne circulaient pas dans la zone ZTL ont été amenés à y circuler le mois suivant.

On note Z l'état : « l'automobile a circulé dans la zone ZTL au cours du mois »et $\overline{Z}$ l'état : « l'automobile n'a pas circulé dans la zone ZTL au cours du mois ».
Pour tout entier naturel n, on note :

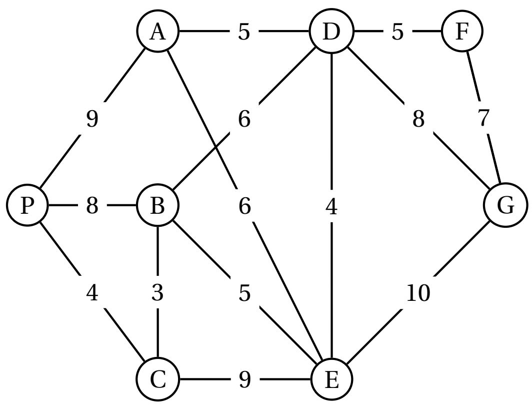
* a_n la proportion d'automobiles circulant dans la zone ZTL au cours du n-ième mois ;
* b_n la proportion d'automobiles ne circulant pas dans la zone ZTL au cours du n-ième mois ;
* $P_n = (a_n\ b_n)$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste après n mois.

On a : $a_n + b_n; = 1$ et $P_0 = \begin{pmatrix}0,4 & 0,6\end{pmatrix}$.

1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste de sommets Z et $\overline{Z}$.
2. (a) Donner la matrice de transition M associée à ce graphe (la première colonne concerne Z et la deuxième concerne $\overline{Z}$).
   (b) Vérifier que $P_1 = \begin{pmatrix}0,3892 & 0,6108\end{pmatrix}$.
3. L'objectif affiché par la municipalité sera-t-il atteint ?

Partie B

Un réseau de navettes gratuites est mis en place entre des parkings situés aux abords de la ville et les principaux sites de la ville.
Le graphe ci-contre indique les voies et les temps des liaisons, en minutes, entre ces différents sites.



1. Peut-on envisager un itinéraire qui relierait le parking P à la gare G en desservant une et une seule fois tous les sites ?
2. Peut-on envisager un itinéraire qui emprunterait une et une seule fois toutes les voies ?
3. Déterminer un trajet de durée minimale pour se rendre du parking P à la gare G.

retour au tableau

10. Métropole sept 2015

Dans une société d'assurance, les clients peuvent choisir de payer leur cotisation chaque mois (paiement mensuel) ou en une fois (paiement annuel).
On constate que 30 % de ceux qui paient en une fois choisissent le paiement mensuel l'année suivante, alors que 85 % de ceux qui paient chaque mois conservent ce mode de paiement l'année suivante.
En 2014, 60 % des clients paient en une fois et 40 % paient mensuellement.

Dans toute la suite de l'exercice, n désigne un nombre entier naturel.
On note :

- a_n la probabilité qu'un client choisi au hasard paie en une fois pour l'année $2014+n$;
- b_n la probabilité qu'un client choisi au hasard paie mensuellement pour l'année $2014+n$.

On a $a_0 = 0,6$ et $b_0 = 0,4$ et on note P_n l'état probabiliste pour l'année $2014+n$. Ainsi $P_0 = \begin{pmatrix}0,6 & 0,4\end{pmatrix}$.
On note :

- A l'état « le client paie en une fois » ;
- B l'état « le client paie mensuellement ».

1. Représenter un graphe probabiliste de sommets A et B.
2. Écrire la matrice de transition M associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique.
3. Déterminer la probabilité qu'un client paie en une fois durant l'année 2018 (arrondir les résultats au millième).
4. Déterminer l'état stable et en donner une interprétation.
5. Pour tout entier naturel n, justifier que $a_{n+1} = 0,55a_n + O,15$.
6. On cherche à déterminer le plus petit entier n tel que $a_n < 0,3334$.
   (a) Écrire un algorithme permettant de déterminer cet entier n.
   (b) On admet que pour tout entier naturel n,
   $$a_n = \frac{4}{15} \times 0,55^n + \frac{1}{3}.$$
   Déterminer par le calcul le plus petit entier n tel que $a_n < 0,3334$.

retour au tableau

11. Nouvelle Calédonie nov 2015

L'été un centre de loisirs propose aux adolescents la pratique du canoë-kayak ou de la planche à rame.
Tous les matins, chaque adolescent doit choisir un et un seul sport parmi les deux proposés.
On admet que :

- si un adolescent choisit le canoë-kayak un jour donné, alors la probabilité qu'il choisisse la planche à rame le jour suivant est égale à $0,4$;
- si un adolescent choisit la planche à rame un jour donné, alors la probabilité qu'il choisisse le canoë-kayak le jour suivant est égale à $0,2$;
- le premier jour, la proportion d'adolescents qui choisissent le canoë-kayak est égale à $0,85$.

On note :

- K l'état : « l'adolescent choisit le canoë-kayak » ;
- $\overline{K}$ l'état : « l'adolescent choisit la planche à rame ».

On note, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

- p_n la probabilité qu'un adolescent pris au hasard choisisse le canoë-kayak lors du n-ième jour ;
- q_n la probabilité qu'un adolescent pris au hasard choisisse la planche à rame le n-ième jour ;
- $P_n = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste lors du n-ième jour.

Les deux parties peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste de sommets K et $\overline{K}$.
2. Donner la matrice de transition M associée à ce graphe, les sommets K et $\overline{K}$ étant classés dans cet ordre.
3. Justifier que $P_1 = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \end{pmatrix}$.
4. Avec la calculatrice, déterminer l'état probabiliste lors du 3^{e} jour.
5. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, montrer que $p_{n+1} = 0,4p_n + 0,2$.
6. On considère l'algorithme suivant :

```
Initialisation
Choisir un nombre entier naturel N ⩾ 2
p prend la valeur 0,85

Traitement
Pour i allant de 2 à N
    p prend la valeur 0,4p + 0,2
Fin pour

Sortie
Afficher p
```

(a) Pour la valeur $N = 5$ saisie, recopier et compléter le tableau suivant par autant de colonnes que nécessaire pour retranscrire l'exécution de l'algorithme. Arrondir les résultats au millième.

Valeur de i		2		
Valeur de p	0,85			

(b) En déduire l'affichage obtenu quand la valeur de N saisie est 5.

(c) Dans le contexte de cet exercice, expliquer comment interpréter le nombre obtenu en sortie de cet algorithme.

Partie B

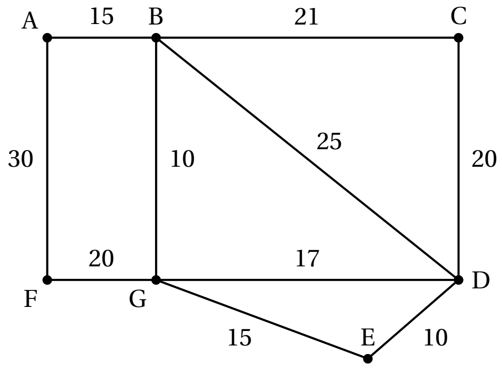
D'après la partie A, on sait que $p_{n+1} = 0,4p_n + 0,2$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.
On admet que $p_n = \dfrac{31}{60} \times 0,4^{n-1} + \dfrac{1}{3}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

1. Conjecturer la limite de la suite $\left(p_n\right)$.
2. Interpréter le résultat.

retour au tableau

12. Antilles sept 2015

Un cycliste désire visiter plusieurs villages notés A, B, C, D, E, F et G reliés entre eux par un réseau de pistes cyclables.
Le graphe ci-contre schématise son plan ; les arêtes représentent les pistes cyclables et les distances sont en kilomètre.



Partie A
Pour faire son parcours, le cycliste décide qu'il procèdera selon l'algorithme ci-dessous :

ligne 1	Marquer sur le plan tous les villages comme non « visités »
ligne 2	Choisir un village de départ
ligne 3	Visiter le village et le marquer « visité »
ligne 4	Rouler vers le village le plus proche
ligne 5	Tant que le village où il arrive n'est pas un village déjà visité
ligne 6	|visiter le village et le marquer « visité »
ligne 7	|rouler vers le village le plus proche sans revenir en arrière
ligne 8	Fin Tant que
ligne 9	afficher la liste des villages visités

1. Quelle propriété du graphe permet à la ligne 4 d'être toujours exécutable ?
2. En partant du village noté G, quelle sera la liste des villages visités ?
3. Existe-t-il un village de départ qui permette, en suivant cet algorithme, de visiter tous les villages ?
4. Le cycliste abandonne l'idée de suivre l'algorithme. Il souhaite maintenant, partant d'un village, y revenir après avoir emprunté toutes les pistes cyclables une et une seule fois. Cela sera-t-il possible ?

Partie B

1. Écrire la matrice M de transition de ce graphe (dans l'ordre $A, B, C, \dots, G$).
2. On donne la matrice M^4 :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} A & B & C & D & E & F & G \end{array} \\ M^4 = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \end{array} & \begin{pmatrix} 10 & 5 & 9 & 11 & 4 & 1 & 16 \\ 5 & 30 & 12 & 23 & 18 & 16 & 16 \\ 9 & 12 & 12 & 14 & 9 & 4 & 18 \\ 11 & 23 & 14 & 28 & 14 & 11 & 23 \\ 4 & 18 & 9 & 14 & 12 & 9 & 12 \\ 1 & 16 & 4 & 11 & 9 & 10 & 5 \\ 16 & 16 & 18 & 23 & 12 & 5 & 30 \end{pmatrix} \end{array}$$

Interpréter le terme en gras, ligne A, colonne F (valant 1) dans le contexte de l'exercice.

retour au tableau

13. Amérique du sud nov2015

Claudine est une passionnée de lecture abonnée à l'hebdomadaire littéraire « La Lecture ». Elle se rend une fois par semaine à la bibliothèque et demande ou non l'avis de la bibliothécaire sur le livre mis en valeur dans l'hebdomadaire « La Lecture ».
Lorsque Claudine demande à la bibliothécaire son avis, la probabilité qu'elle le demande de nouveau la semaine suivante est $0,9$.
Lorsque Claudine ne demande pas à la bibliothécaire son avis, la probabilité qu'elle ne le demande pas non plus la semaine suivante est $0,6$.
La première semaine, on suppose que la probabilité que Claudine demande un avis vaut $0,1$.
Pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on note :

- a_n la probabilité que Claudine demande un avis à la bibliothécaire la n-ième semaine ;
- b_n, la probabilité que Claudine ne demande pas d'avis à la bibliothécaire la n-ième semaine ;
- $P_n = \begin{pmatrix}a_n & b_n\end{pmatrix}$ la matrice ligne traduisant l'état probabiliste la n-ième semaine.

On a ainsi $a_1 = 0,1$ et $b_1 = 0,9$.

1. (a) Illustrer la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B : A représente l'état « Claudine demande un avis à la bibliothécaire » ; B représente l'état « Claudine ne demande pas d'avis à la bibliothécaire ».
   (b) Indiquer la matrice de transition M associée à ce graphe. On prendra les sommets A et B dans l'ordre (A, B).
2. Montrer que l'on a $P_2 = \begin{pmatrix}0,45 & 0,55\end{pmatrix}$.
3. (a) Montrer que l'état stable de la répartition du choix de la demande d'avis est $P = \begin{pmatrix}0,8 & 0,2\end{pmatrix}$.
   (b) Interpréter ce résultat.
4. On admet que, pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on a :

$$a_{n+1} = 0,5a_n + 0,4.$$

   On considère l'algorithme suivant :

VARIABLES :	A est un réel et N est un entier naturel
INITIALISATION :	A prend la valeur $0,1$ N prend la valeur 1
TRAITEMENT :	Tant que $A \leqslant 0,79$ N prend la valeur $N+1$ A prend la valeur $0,5 \times A + 0,4$ Fin du Tant que
SORTIE :	Afficher N

   Préciser ce que cet algorithme permet d'obtenir. (On ne demande pas de donner la valeur de N affichée en sortie d'algorithme.)
5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   On admet que, pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on a :

$$a_n = 0,8 - 0,7 \times 0,5^{n-1}.$$

   Déterminer le nombre de semaines à partir duquel la probabilité que Claudine demande un avis soit supérieure à $0,799$.

retour au tableau

14. Antilles 2015

Une municipalité vient de mettre en place le service « vélo en liberté ». Il s'agit d'un service de location de vélos à la journée. Les vélos sont disponibles sur deux sites A et B et doivent être ramenés en fin de journée indifféremment dans l'un des deux sites.
Après une étude statistique, on considère que :

— si un vélo est loué sur le site A, la probabilité d'être ramené en A est $0,6$;

— si un vélo est loué sur le site B, la probabilité d'être ramené en B est $0,7$.

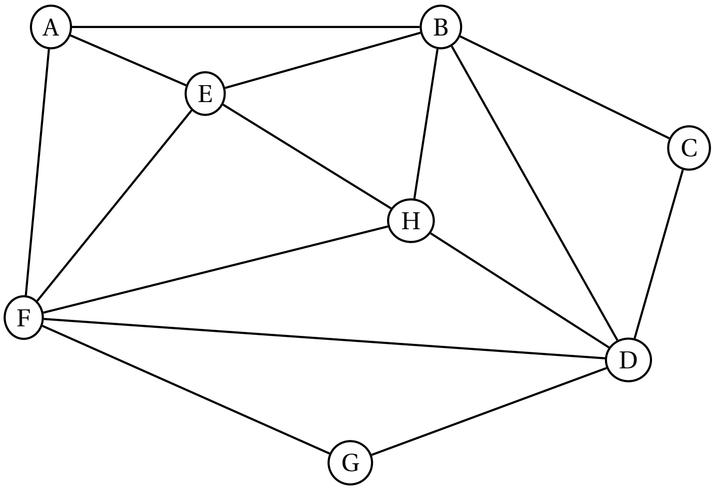
Les résultats numériques seront arrondis à 10^{-2} près.

1. En notant respectivement A et B les états « le vélo est en A » et « le vélo est en B », traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets A et B.
2. Donner M la matrice de transition de ce graphe en considérant les sommets dans l'ordre A, B.
3. Pour tout entier naturel n, on note a_n (respectivement b_n) la probabilité qu'un vélo quelconque soit, après n jours, sur le site A (respectivement sur le site B).
   On note P_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ correspondant à l'état probabiliste après n jours.
   Le premier jour, tous les vélos sont distribués également sur les deux sites. On a donc $P_0 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$.
   (a) On donne :
   $$M^2 = \begin{pmatrix} 0,48 & 0,52 \\ 0,39 & 0,61 \end{pmatrix}.$$
   Calculer P_2 en donnant le détail des calculs matriciels.
   (b) Calculer P_4 et interpréter le résultat dans le contexte du problème.
   (c) Déterminer l'état stable du graphe, noté $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$.
   (d) Tous les mois, un véhicule est affecté à la redistribution des vélos afin de rétablir au mieux la répartition initiale qui était de 70 vélos sur chaque site.
   La municipalité envisage d'affecter un véhicule pouvant contenir 12vélos.
   Ce choix parait-il adapté à la situation ?

retour au tableau

15. Asie 2015

La coopérative LAFRUITIERE collecte le lait de 7 exploitations de montagne. La situation géographique est représentée par le graphe ci-dessous, noté G_L. La coopérative est située au sommet A, les autres sommets B, C, D, E, F, G et H représentent les différentes exploitations ; les arêtes représentent le réseau routier reliant ces exploitations.



Partie A

1. (a) Le graphe G_L est-il complet ? Justifier.
   (b) Le graphe G_L est-il connexe ? Justifier.
2. Est-il possible d'organiser une tournée de toutes les exploitations en partant de A et en terminant en A et en passant au moins une fois par chaque client, tout en empruntant une fois et une seule chaque route ? Justifier la réponse.
3. On appelle M la matrice d'adjacence associée au graphe G_L (les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique).

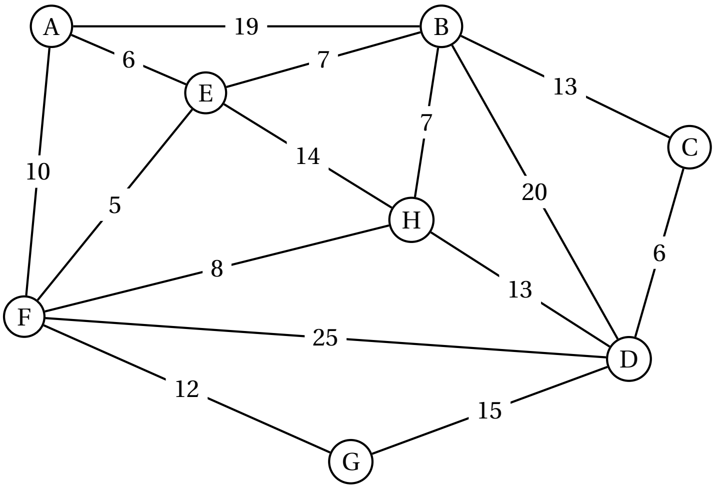
   On donne la matrice $M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 3 & 7 & 8 & 11 & 3 & 6 \\ 11 & 8 & 7 & 13 & 12 & 8 & 6 & 13 \\ 3 & 7 & 2 & 7 & 5 & 6 & 2 & 4 \\ 7 & 13 & 7 & 8 & 8 & 13 & 7 & 12 \\ 8 & 12 & 5 & 8 & 8 & 12 & 5 & 11 \\ 11 & 8 & 6 & 13 & 12 & 8 & 7 & 13 \\ 3 & 6 & 2 & 7 & 5 & 7 & 2 & 4 \\ 6 & 13 & 4 & 12 & 11 & 13 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

   Déterminer, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 reliant A à H.

   Indiquer ces chemins.

Partie B

Les arêtes sont pondérées par les distances entre les exploitations, exprimées en kilomètres. La coopérative doit collecter du lait provenant de l'exploitation D ; quel est le plus court parcours pour se rendre de A à D ? Justifier.

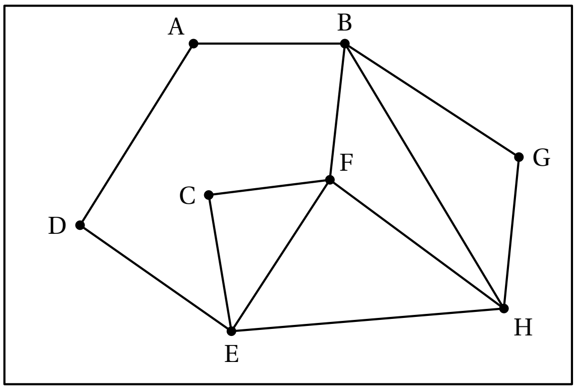


retour au tableau

16. Métropole 2015

PARTIE A

On considère le graphe $\mathcal{G}$ ci-dessous :



1. Déterminer en justifiant si ce graphe :
   (a) est connexe ;
   (b) admet une chaîne eulérienne.
2. On note M la matrice d'adjacence associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique. On donne :

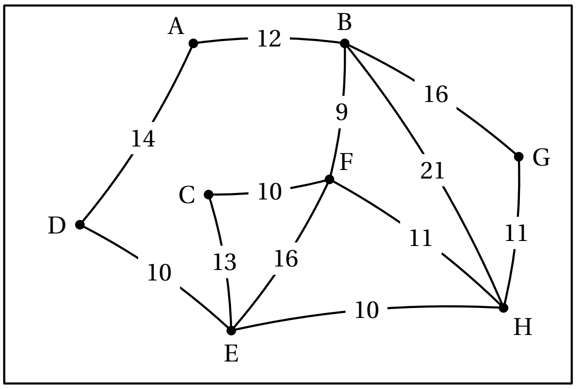
$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 & 3 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 5 & 9 & 6 & 8 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 6 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 5 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 5 & 4 & 8 & 3 & 9 \\ 2 & 9 & 6 & 3 & 8 & 6 & 3 & 9 \\ 1 & 6 & 3 & 2 & 3 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & 8 & 3 & 2 & 9 & 9 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Donner, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 reliant E à B.

PARTIE B

Un club alpin souhaite proposer à ses membres des randonnées de plusieurs jours dans les Alpes. À cet effet, huit refuges notés A, B, C, D, E, F, G et H ont été sélectionnés.
Le graphe $\mathcal{G}$ de la partie A permet de visualiser les différents itinéraires possibles, les sommets représentant les refuges et les arêtes schématisant tous les sentiers de randonnée balisés les reliant.

1. D'après l'étude effectuée dans la partie A, le club alpin est-il en mesure de proposer :
   (a) un itinéraire au départ du refuge A qui passerait par tous les refuges en empruntant une fois et une seule fois chacun des sentiers ? Si oui, proposer un tel itinéraire ;
   (b) des itinéraires de trois jours (un jour correspondant à une liaison entre deux refuges) reliant le refuge E au refuge B ? Si oui, combien peut-il en proposer ?
2. Le graphe $\mathcal{G}$ est complété ci-dessous par la longueur en kilomètres de chacun des sentiers.



Le club alpin désire aussi proposer à ses membres l'itinéraire le plus court reliant A à H.
Déterminer cet itinéraire et en préciser la longueur en kilomètres.

retour au tableau

17. Polynésie 2015

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Un constructeur de planches de surf fabrique 3 modèles. La conception de chaque modèle nécessite le passage par 3 postes de travail. Le **tableau 1** indique le nombre d'heures nécessaires par modèle et par poste pour réaliser les planches et le **tableau 2** indique le coût horaire par poste de travail.

Tableau 1	Poste 1	Poste 2	Poste 3		Tableau 2	
Modèle 1	8 h	10 h	14 h		Poste 1	25 €/h
Modèle 2	6 h	6 h	10 h		Poste 2	20 €/h
Modèle 3	12 h	10 h	18 h		Poste 3	15 €/h

1. Soit H et C les deux : matrices suivantes : $H = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 14 \\ 6 & 6 & 10 \\ 12 & 10 & 18 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 25 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}$.
   (a) Donner la matrice produit $P = H \times C$.
   (b) Que représentent les coefficients de la matrice $P = H \times C$?
2. Après une étude de marché, le fabricant souhaite que les prix de revient par modèle soient les suivants :

   Modèle 1 : 500 € ; Modèle 2 : 350 € ; Modèle 3 : 650 €

   Il cherche à déterminer les nouveaux coûts horaires par poste, notés a, b et c, permettant d'obtenir ces prix de revient.
   (a) Montrer que les réels a, b et c doivent être solutions du système
   $H \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 350 \\ 650 \end{pmatrix}$.
   (b) Déterminer les réels a, b et c.

Partie B

La façade du magasin dans lequel sont commercialisées les planches est illuminée par un très grand nombre de spots qui sont programmés de la manière suivante :

- les spots s'allument tous à 22 heures ;
- toutes les 10 secondes à partir de 22 heures, et ce de manière aléatoire, 30 % des spots allumés s'éteignent et 50 % de ceux qui sont éteints se rallument.

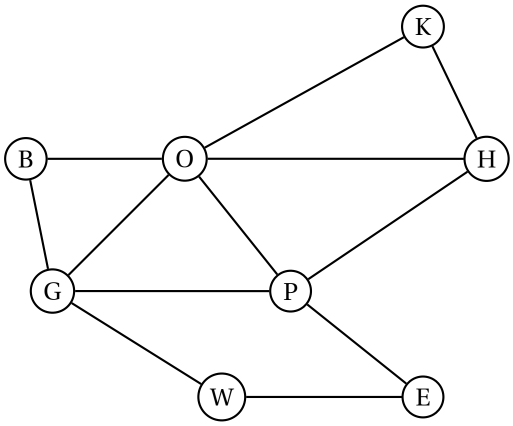
On note : A l'état : « le spot est allumé » et E l'état : « le spot est éteint ».

1. (a) Dessiner un graphe probabiliste traduisant la situation.
   (b) Recopier et compléter la matrice de transition (dans l'ordre A, E) associée au graphe, $M = \begin{pmatrix} \cdots & 0,3 \\ 0,5 & \cdots \end{pmatrix}$.
2. On note n le nombre d'étapes (c'est à dire d'intervalles de temps de 10 secondes) qui s'écoulent à partir de 22 heures et $P_n = (a_n \quad b_n)$ l'état d'un spot à l'étape n, où a_n est la probabilité qu'il soit allumé et b_n la probabilité qu'il soit éteint.
   On a alors, pour tout entier naturel n : $P_{n+1} = P_n \times M$.
   (a) Justifier que $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$. Écrire une relation entre P_0 et P_n.
   (b) Déterminer les coefficients de la matrice P_3. Quelle est la probabilité que le spot considéré soit éteint à 22 heures et 30 secondes ?
3. Déterminer l'état stable $(a \quad b)$ du graphe probabiliste.

retour au tableau

18. Centres etrangers 2015

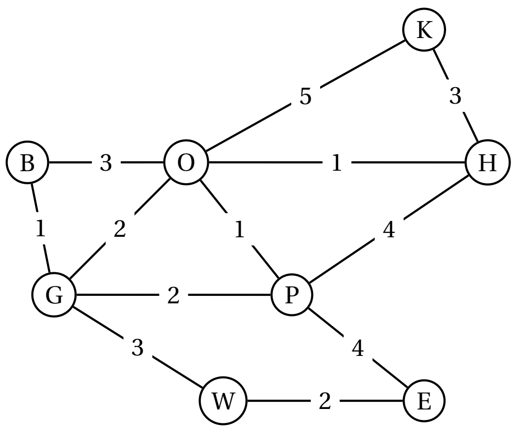
On a schématisé ci-dessous une partie du plan du métro londonien par un graphe Γ dont les sommets sont les stations et les arêtes sont les lignes desservant ces stations.
Chaque station de métro est désignée par son initiale comme indiqué dans la légende.



Légende :
B : Bond Street
E : Embankment
G : Green Park
H : Holborn
K : King's Cross St Pancras
O : Oxford Circus
P : Piccadilly Circus
W : Westminster

1. (a) Déterminer en justifiant si le graphe Γ est connexe.
   (b) Déterminer en justifiant si le graphe Γ est complet.
2. Déterminer, en justifiant, si le graphe Γ admet une chaîne eulérienne. Si oui, donner une telle chaîne.
3. Donner la matrice d'adjacence M du graphe Γ (les sommets seront rangés dans l'ordre alphabétique).

   Pour la suite de l'exercice, on donne la matrice $M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 4 & 2 & 7 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 6 & 4 \\ 6 & 1 & 4 & 4 & 4 & 9 & 10 & 6 \\ 4 & 1 & 4 & 4 & 5 & 8 & 8 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 5 & 2 & 7 & 3 & 1 \\ 7 & 3 & 9 & 8 & 7 & 8 & 10 & 3 \\ 3 & 6 & 10 & 8 & 3 & 10 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 3 & 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
4. Un touriste se trouve à la station Holborn. Il prévoit de se rendre à la station Green Park en utilisant exactement trois lignes de métro sur son trajet.
   (a) Sans utiliser le graphe, donner le nombre de trajets possibles et justifier la réponse.
   (b) Donner les trajets possibles .



Légende :
B : Bond Street
E : Embankment
G : Green Park
H : Holborn
K : King's Cross St Pancras
O : Oxford Circus
P : Piccadilly Circus
W : Westminster

Sur le graphe pondéré ci-dessus, on a indiqué la durée, exprimée en minutes, des trajets entre chaque station (la durée est indiquée sur chaque arête du graphe Γ).

5. À partir de la station Westminster, ce touriste doit rejoindre la station King's Cross St Pancras le plus rapidement possible pour prendre un train.
   En utilisant l'algorithme de Dijkstra, déterminer le trajet permettant de relier la station Westminster à la station King's Cross St Pancras en une durée minimale. On précisera cette durée.

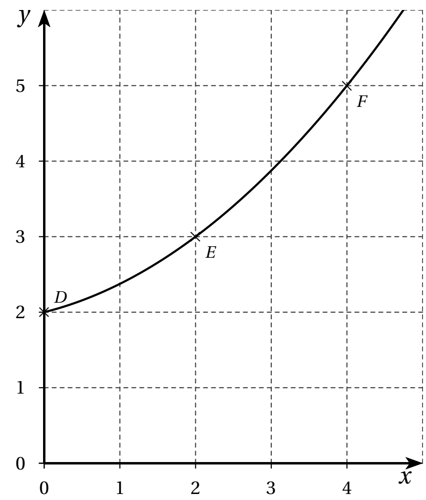
retour au tableau

19. Amérique du nord 2015

Les parties A et B sont indépendantes

Un créateur d'entreprise a lancé un réseau d'agences de services à domicile. Depuis 2010, le nombre d'agences n'a fait qu'augmenter. Ainsi, l'entreprise qui comptait 200 agences au 1er janvier 2010 est passée à 300 agences au 1er janvier 2012 puis à 500 agences au 1er janvier 2014.
On admet que l'évolution du nombre d'agences peut être modélisée par une fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont trois nombres réels.
La variable x désigne le nombre d'années écoulées depuis 2010 et $f(x)$ exprime le nombre d'agences en centaines. la valeur 0 de x correspond donc à l'année 2010.
Sur le dessin ci-dessous, on a représenté graphiquement la fonction f.

Partie A



On cherche à déterminer la valeur des cœfficients a, b et c.

1. (a) À partir des données de l'énoncé, écrire un système d'équations traduisant cette situation.

   (b) En déduire que le système précédent est équivalent à : $MX = R$ avec $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et R une matrice colonne que l'on précisera.

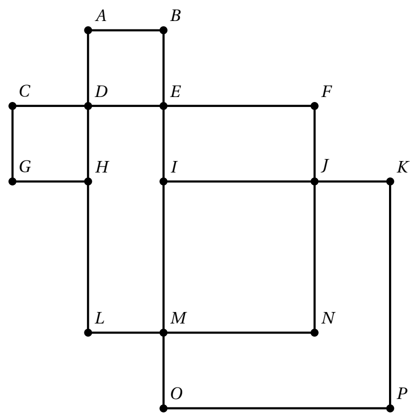
2. On admet que $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0,125 & -0,25 & 0,125 \\ -0,75 & 1 & -0,25 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   À l'aide de cette matrice, déterminer les valeurs des cœfficients a, b et c, en détaillant les calculs.

3. Suivant ce modèle, déterminer le nombre d'agences que l'entreprise possédera au 1er janvier 2016.

Partie B

Le responsable d'une agence de services à domicile implantée en ville a représenté par le graphe ci-dessous toutes les rues dans lesquelles se trouvent des clients qu'il doit visiter quotidiennement. Dans ce graphe, les arêtes sont les rues et les sommets sont les intersections des rues.



1. (a) Déterminer si le graphe est connexe.
   (b) Déterminer si le graphe est complet.

Ce responsable voudrait effectuer un circuit qui passe une et une seule fois par chaque rue dans laquelle se trouvent des clients.

2. Déterminer si ce circuit existe dans les deux cas suivants :
   (a) Le point d'arrivée est le même que le point de départ.
   (b) Le point d'arrivée n'est pas le même que le point de départ.

retour au tableau

20. Liban 2015

Dans un pays, seulement deux opérateurs de téléphonie mobile SAFIR et TECIM proposent la 4G (standard de transmission de données).
Une étude a montré que d'une année à l'autre :

- 41 % des clients de l'opérateur SAFIR le quittent pour l'opérateur TECIM ;
- 9 % des clients de l'opérateur TECIM le quittent pour l'opérateur SAFIR ;
- Aucun client ne renonce à l'utilisation de la 4G.

Cette situation peut être modélisée par un graphe probabiliste $\mathscr{G}$ de sommets S et T où :

- S est l'évènement « l'utilisateur de la 4G est un client de l'opérateur SAFIR » ;
- T est l'évènement « l'utilisateur de la 4G est un client de l'opérateur TECIM ».

Chaque année on choisit au hasard un utilisateur de la 4G et on note pour tout entier naturel n :

- s_n la probabilité que cet utilisateur soit un client de l'opérateur SAFIR en $2014+n$;
- t_n la probabilité que cet utilisateur soit un client de l'opérateur TECIM en $2014+n$.

On note $P_n = (s_n \quad t_n)$ la matrice ligne de l'état probabiliste pour l'année $2014+n$.
Dans cet exercice, on se propose de savoir si l'opérateur TECIM atteindra l'objectif d'avoir comme clients au moins 80 % de la population utilisatrice de la 4G.

Partie A

1. Dessiner le graphe probabiliste $\mathscr{G}$.
2. On admet que la matrice de transition du graphe $\mathscr{G}$ en considérant les sommets dans l'ordre S et T est $M = \begin{pmatrix} 0,59 & 0,41 \\ 0,09 & 0,91 \end{pmatrix}$.

   On note $P = (a \quad b)$ la matrice ligne correspondant à l'état stable de ce graphe $\mathscr{G}$.

   (a) Montrer que les nombres a et b sont solutions du système $\left\{\begin{array}{lcl} 0,41a - 0,09b & = & 0 \\ a+b & = & 1 \end{array}\right.$.

   (b) Résoudre le système précédent.
3. On admet que $a = 0,18$ et $b = 0,82$. Déterminer, en justifiant, si l'opérateur TECIM peut espérer atteindre son objectif.

Partie B

En 2014, on sait que 35 % des utilisateurs de la 4G sont des clients de l'opérateur SAFIR et que 65 % sont des clients de l'opérateur TECIM. Ainsi $P_0 = (0,35 \quad 0,65)$.

1. Déterminer la répartition des clients de la 4G au bout de 2 ans.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $t_{n+1} = 0,5t_n + 0,41$.
3. Pour déterminer au bout de combien d'années l'opérateur TECIM atteindra son objectif, on a commencé par élaborer l'algorithme ci-dessous. Recopier et compléter les lignes L6, L7 et L9 de cet algorithme pour qu'il donne le résultat attendu.

L1	**Variables :**	T est un nombre
L2		N est un nombre entier
L3	**Traitement :**	Affecter à T la valeur 0,65
L4		Affecter à N la valeur 0
L5		Tant que $T < 0,80$
L6		Affecter à T la valeur ...
L7		Affecter à N la valeur ...
L8		Fin Tant que
L9	**Sortie :**	Afficher ...

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = t_n - 0,82$.

(a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $0,5$. Préciser son premier terme.

(b) En déduire que : $t_n = -0,17 \times 0,5^n + 0,82$.

(c) Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation : $-0,17 \times 0,5^n + 0,82 \geqslant 0,80$.

(d) Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

retour au tableau

21. Pondichery avril 2015

Les sites internet A, B, C ont des liens entre eux. Un internaute connecté sur un de ces trois sites peut, à toutes les minutes, soit y rester soit utiliser un lien vers un des deux autres sites.

- Pour un internaute connecté sur le site A, la probabilité d'utiliser le lien vers B est de 0,2 et celle d'utiliser le lien vers C est de 0,2.
- Pour un internaute connecté sur le site B, la probabilité d'utiliser le lien vers A est de 0,1 et celle d'utiliser le lien vers C est de 0,4.
- Pour un internaute connecté sur le site C, la probabilité d'utiliser le lien vers A est de 0,2 mais il n'y a pas de lien direct avec B.

L'unité de temps est la minute, et à un instant $t = 0$, le nombre de visiteurs est, respectivement sur les sites A, B et C : 100, 0 et 0.
On représente la distribution des internautes sur les trois sites après t minutes par une matrice N_t ; ainsi $N_0 = \begin{pmatrix}100 & 0 & 0\end{pmatrix}$.
On suppose qu'il n'y a ni déconnexion pendant l'heure (de $t = 0$ à $t = 60$) ni nouveaux internautes visiteurs.

1. Représenter le graphe probabiliste de sommets A, B et C correspondant à la situation décrite.
2. Écrire la matrice M de transition associée à ce graphe (dans l'ordre A, B, C).
3. On donne

$$M^2 = \begin{pmatrix}0,42 & 0,22 & 0,36\\ 0,19 & 0,27 & 0,54\\ 0,28 & 0,04 & 0,68\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^{20} \approx \begin{pmatrix}0,3125 & 0,125 & 0,5625\\ 0,3125 & 0,125 & 0,5625\\ 0,3125 & 0,125 & 0,5625\end{pmatrix}.$$

   Calculer N_2. Interpréter le résultat obtenu.
4. Calculer $N_0 \times M^{20}$. Conjecturer la valeur de l'état stable et interpréter la réponse.
5. Un des internautes transmet un virus à tout site qu'il visitera.
   Il se connecte initialement sur le site C et commence sa navigation.
   À l'instant $t = 0$, le site C est donc infecté.
   (a) Quelle est la probabilité qu'à l'instant $t = 1$ le site A soit infecté ?
   (b) Quelle est la probabilité qu'à l'instant $t = 2$ les trois sites soient infectés ?

retour au tableau

22. Nouvelle Calédonie mars 2015

Une société est spécialisée dans la vente en ligne de produits de haute technologie sur internet.

Partie A

La société réalise tout au long de l'année des journées promotionnelles pour attirer ses clients sur son site internet. Elle leur envoie un courrier électronique annonçant chaque journée de promotion.
Parmi les clients, 5 % d'entre eux ont visité le site internet de la société lors de la première journée de promotion.
Une étude portant sur le comportement des clients auxquels la société a envoyé ce type de message a mis en évidence que :

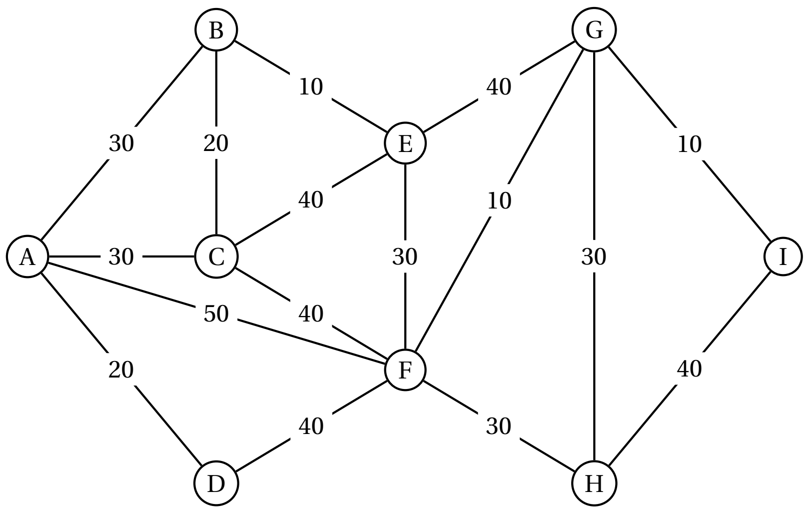
- trois clients sur cinq ayant visité le site internet lors d'une journée promotionnelle, le visitent à nouveau lors de 1a journée promotionnelle suivante ;
- un client sur cinq n'ayant pas visité le site internet lors d'une journée promotionnelle, le visite lors de la journée promotionnelle suivante.

On choisit. au hasard, un client ayant reçu le message annonçant la première journée promotionnelle.
On formule l'hypothèse que les comportements des clients observés lors de l'étude n'évoluent pas d'une journée promotionnelle à la suivante.
Pour tout entier naturel n non nul, on note l'état probabiliste ainsi défini par la matrice ligne $P_n = \begin{pmatrix}x_n & y_n\end{pmatrix}$, où x_n désigne la probabilité que le client, pris au hasard, visite le site internet de la société lors de la n-ième journée de promotion.

1. Pour une journée promotionnelle donnée, on note V, l'évènement « le client a visité le site internet lors de la journée promotionnelle ».
   Représenter cette situation par un graphe probabiliste de sommets V et $\overline{V}$.
2. Écrire la matrice de transition M de ce graphe en prenant les sommets V et $\overline{V}$ dans cet ordre.
3. En remarquant que $P_1 = \begin{pmatrix}0,05 & 0,95\end{pmatrix}$, déterminer P_2. Interpréter ce résultat.
4. On admet que le taux de visites se stabilise à long terme. Montrer que $\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$ est un état stable de ce système.

Partie B

Le réseau informatique de cette société est constitué d'un ensemble de routeurs interconnectés à l'aide de fibres optiques haut débit. Le graphe qui suit schématise l'architecture de ce réseau. Les sommets représentent les routeurs et les arêtes représentent les fibres optiques.
On a fait figurer les durées de transfert des données (en millisecondes) d'un routeur à un autre sur les fibres optiques du réseau de la société.



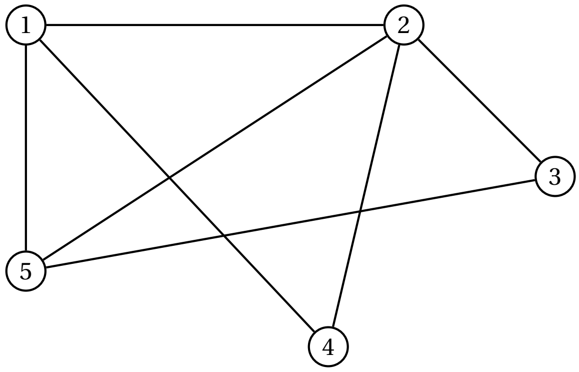
1. Chaque année la société doit vérifier l'état physique de la fibre optique installée sur son réseau. Un robot inspecte toute la longueur de la fibre optique afin de s'assurer qu'elle ne présente pas de détérioration apparente.
   Peut-il parcourir l'ensemble du réseau en suivant les fibres optiques et en empruntant chaque fibre optique une et une seule fois ? Justifier la réponse.
   Si un tel parcours est possible, préciser par quel(s) routeur(s) du réseau le robot doit commencer son inspection.

2. Un ordinateur, relié au routeur A envoie un paquet de données à un ordinateur relié au routeur I.
   Le paquet de données a mis 70 ms pour transiter du routeur A au routeur I. Ce paquet de données a-t-il emprunté le chemin le plus rapide sur le réseau ? Justifier la réponse.

retour au tableau

23. Nouvelle Calédonie nov2014

Un parc de loisirs propose à ses visiteurs des parcours d'accrobranches.
Les différents parcours sont modélisés par le graphe Γ ci-dessous où les sommets correspondent aux cinq arbres marquant leurs extrémités. Chaque parcours est représenté par une arête du graphe et peut être réalisé dans les deux sens.



1. L'organisateur du parc de loisirs souhaite que les visiteurs puissent, s'ils le souhaitent, réaliser un itinéraire complet d'accrobranches, c'est-à-dire un itinéraire empruntant une fois et une seule chaque parcours et en commençant cet itinéraire par l'arbre numéro 1.

   Justifier que ce souhait est réalisable et proposer un tel itinéraire.

2. On note M la matrice associée au graphe Γ en considérant les sommets pris dans l'ordre croissant des numéros d'arbres.

   (a) Écrire la matrice M.

   (b) On donne, ci-dessous, les matrices M^2 et M^3.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 3 & 5 & 7 \\ 7 & 6 & 6 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 2 & 3 \\ 7 & 7 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

   L'organisateur du parc de loisir souhaite organiser des « itinéraires express » qui débuteront à l'arbre numéro 1, emprunteront trois parcours d'accrobranches et finiront à l'arbre 4. Ces itinéraires peuvent éventuellement emprunter plusieurs fois le même parcours.

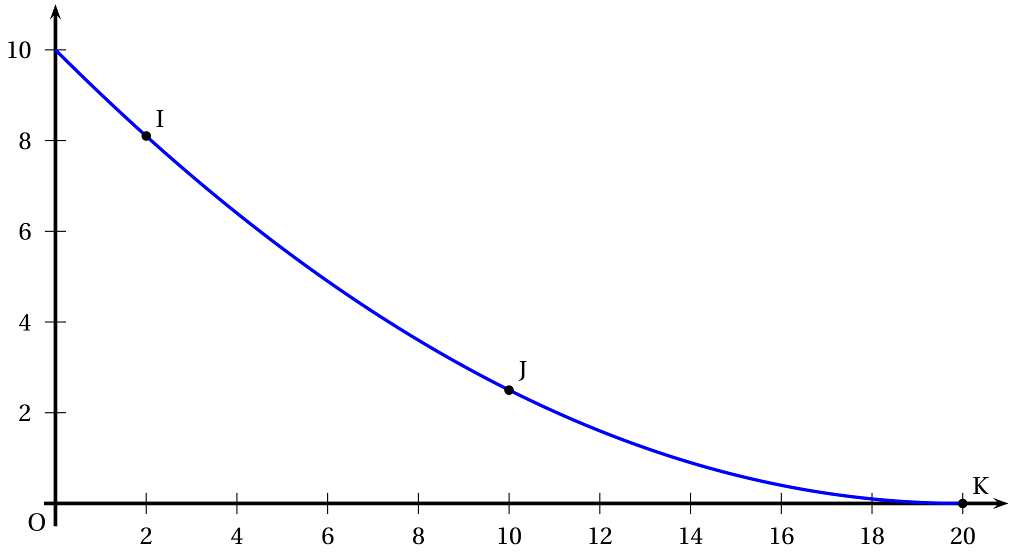
   Déterminer, en justifiant votre résultat, le nombre « d'itinéraires express »

   réalisables.

   (On ne demande pas de donner ces différents itinéraires)

3. Pour terminer ces « itinéraires express », on installe un toboggan géant sur l'arbre 4.

   La forme de ce toboggan est modélisée par une fonction f dont la courbe $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous dans un repère orthonormé.



Cette courbe passe par les points I, J et K de coordonnées respectives (2 ; 8,1), (10 ; 2,5) et (20 ; 0).
La fonction f est définie sur [0 ; 20] par

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b et c sont trois nombres réels.

(a) Justifier que a, b et c sont solutions du système : $\begin{cases} 400a + 20b + c & = & 0 \\ 100a + 10b + c & = & 2,5 \\ 4a + 2b + c & = & 8,1 \end{cases}$

(b) Déterminer les matrices X et V pour que le système précédent soit équivalent à

$$UX = V \quad \text{où} \quad U = \begin{pmatrix} 400 & 20 & 1 \\ 100 & 10 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Déterminer a, b et c.

retour au tableau

24. Amerique du sud nov2014

La première semaine de l'année, le responsable de la communication d'une grande entreprise propose aux employés de se déterminer sur un nouveau logo, le choix devant être fait par un vote en fin d'année.
Deux logos, désignés respectivement par A et B, sont soumis au choix.
Lors de la présentation qui se déroule la première semaine de l'année, 24 % des employés sont favorables au logo A et tous les autres employés sont favorables au logo B.
Les discussions entre employés font évoluer cette répartition tout au long de l'année.
Ainsi 9 % des employés favorables au logo A changent d'avis la semaine suivante et 16 % des employés favorables au logo B changent d'avis la semaine suivante.

Pour tout n, $n \geqslant 1$, on note :

- a_n la probabilité qu'un employé soit favorable au logo A la semaine n ;
- b_n la probabilité qu'un employé soit favorable au logo B la semaine n ;
- P_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ traduisant l'état probabiliste la semaine n.

On a donc, pour tout $n \geqslant 1$, $a_n + b_n = 1$ et $P_1 = \begin{pmatrix} 0,24 & 0,76 \end{pmatrix}$.

1. Traduire la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.
2. Déterminer la matrice de transition M de ce graphe, en rangeant les sommets dans l'ordre alphabétique.
3. (a) À l'aide de la relation $P_{n+1} = P_n \times M$, exprimer, pour tout $n \geqslant 1$, a_{n+1} en fonction de a_n et de b_n.
   (b) En déduire que l'on a, pour tout $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = 0,75a_n + 0,16$.
4. À l'aide de la calculatrice, donner, sans justifier, la probabilité à 0,001 près qu'un employé soit favorable au logo A la semaine 4.
5. On note $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ l'état stable de la répartition des employés.
   (a) Déterminer un système de deux équations que doivent vérifier a et b.
   (b) Résoudre le système obtenu dans la question précédente.
   (c) On admet que l'état stable est $P = \begin{pmatrix} 0,64 & 0,36 \end{pmatrix}$. Interpréter le résultat.
6. On considère l'algorithme suivant :

VARIABLES :	A est un réel
	N est un entier naturel
INITIALISATION :	A prend la valeur 0,24
	N prend la valeur 0
TRAITEMENT :	Tant que $A < 0,639$
	N prend la valeur $N + 1$
	A prend la valeur $0,75 \times A + 0,16$
	Fin du Tant que
SORTIE :	Afficher N

Préciser ce que cet algorithme permet d'obtenir (on ne demande pas de donner la valeur de N affichée).

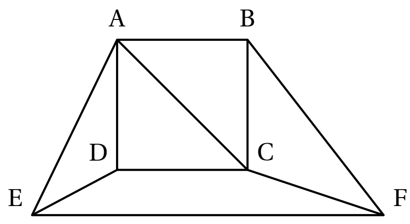
retour au tableau

25. Polynésie sept 2014

Partie A

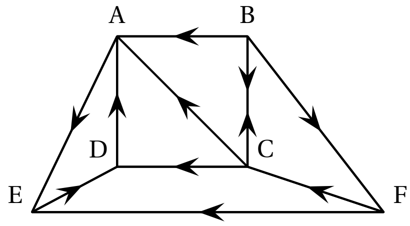
Le graphe suivant représente le plan d'une ville. Les arêtes du graphe représentent les principales avenues et les sommets du graphe les carrefours entre ces avenues.

1. Donner l'ordre du graphe puis le degré de chacun des sommets.
2. Un piéton peut-il parcourir toutes ces avenues sans emprunter plusieurs fois la même avenue :
   (a) en partant d'un carrefour et en revenant à son point de départ ? Justifier la réponse.
   (b) en partant d'un carrefour et en arrivant à un carrefour différent ? Justifier la réponse.



Partie B

Dans le graphe ci-contre, on a indiqué, pour cette même ville, le sens de circulation pour les véhicules sur les différentes avenues.



1. Peut-on trouver un trajet de longueur quelconque qui permet d'aller de D à B en respectant les sens de circulation ? Justifier la réponse.
2. Écrire la matrice M associée à ce graphe (on rangera les sommets dans l'ordre alphabétique)

1. On donne la matrice

$$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Que représentent les coefficients de cette matrice ?
   (b) Combien y-a-t-il de chemins de longueur 3 partant du carrefour B et arrivant en A ?
   Écrire tous ces chemins.
   (c) Combien y-a-t-il de chemins de longueur 3 arrivant au point E ? Expliquer la démarche.

retour au tableau

26. Métropole sept 2014

Pour satisfaire ses adhérents, un club de sport a instauré trois niveaux d'apprentissage :

DÉBUTANT (D), CONFIRMÉ (C) et EXPERT (E).

Au 1er septembre 2012, lors de l'inscription, le club comptait :

- 30 % de débutants ;
- 50 % de confirmés ;
- 20 % d'experts.

D'une année sur l'autre, on constate que :

- parmi les adhérents de niveau débutant, 40 % restent à ce niveau et 60 % passent au niveau confirmé ;
- parmi les adhérents de niveau confirmé, 60 % restent à ce niveau et 40 % passent au niveau expert ;
- parmi les adhérents de niveau expert, 80 % restent à ce niveau, 10 % redescendent au niveau confirmé et les autres 10 % préfèrent reprendre les bases au niveau débutant.

On considère qu'il n'y a pas de nouveaux venus ni de départs dans le club.

Soit $P_n = (d_n \quad e_n \quad e_n)$ la matrice ligne décrivant l'état probabiliste de la répartition parmi les trois niveaux d'apprentissage D, C et E au 1er septembre de l'année $2012 + n$ pour tout entier naturel n.

1. (a) Donner sans justification la matrice P_0.

   (b) Traduire la situation par un graphe probabiliste de sommets D, C et E.
   On donne la matrice carrée M de transition en respectant l'ordre D, C, E des sommets.

$$M = \begin{pmatrix} 0,4 & \boldsymbol{0,6} & 0 \\ 0 & 0,6 & 0,4 \\ 0,1 & 0,1 & \boldsymbol{0,8} \end{pmatrix}$$

   Dans la suite de l'exercice, on pourra utiliser les résultats suivants (résultats arrondis au millième) :

$$M^5 = \begin{pmatrix} 0,085 & 0,331 & 0,584 \\ 0,097 & 0,293 & 0,610 \\ 0,104 & 0,298 & 0,598 \end{pmatrix} \qquad M^{10} = \begin{pmatrix} 0,100 & 0,299 & 0,601 \\ 0,100 & 0,300 & 0,600 \\ 0,100 & 0,300 & 0,600 \end{pmatrix}$$

2. Dans cette matrice on lit ***0,6*** et ***0,8*** en italique gras.

   (a) Préciser, à l'aide d'une phrase, à quoi correspondent ces deux valeurs en lien avec la situation étudiée.

   (b) Calculer P_1.

   (c) Déterminer la répartition prévisible, en pourcentages, des adhérents dans ce club de sport au 1er septembre 2017. Les résultats seront donnés à 0,1 % près.

3. (a) En calculant P_{10}, émettre une conjecture sur la matrice P correspondant à l'état probabiliste stable.

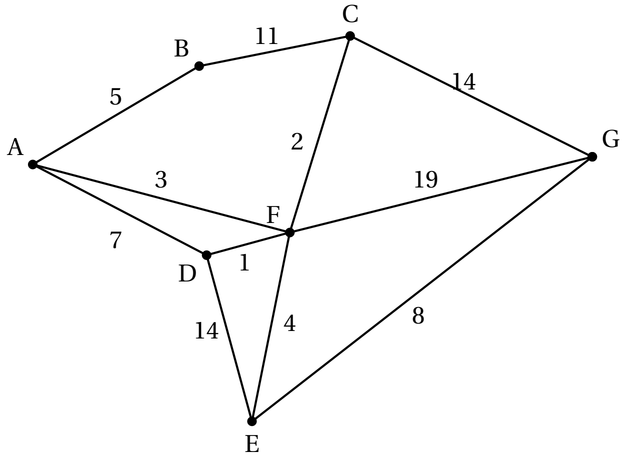
   (b) Vérifier cette conjecture.

   (c) Quelle conclusion peut-on en tirer pour la répartition des adhérents ?

retour au tableau

27. Antilles sept 2014

Dans le jeu vidéo « Save the princess », l'objectif est d'aller délivrer une princesse tout en récoltant des trésors situés dans les couloirs du château.
Le plan du château est représenté par le graphe pondéré ci-dessous. Les sommets de ce graphe représentent les salles et les arêtes représentent les couloirs reliant les salles entre elles.



Partie A

1. Le joueur se trouve dans la salle A. Il décide de visiter chacun des couloirs afin de trouver le plus de trésors possibles. Peut-il trouver un trajet lui permettant de passer par tous les couloirs une et une seule fois ? Justifier la réponse.
2. Dans chaque couloir se trouve un certain nombre de monstres. Les étiquettes du graphe pondéré donnent le nombre de monstres présents dans les couloirs.
   Le joueur souhaite, en partant de A, rejoindre la princesse enfermée dans la salle G. Déterminer le chemin qu'il doit prendre pour délivrer la princesse en combattant le moins de monstres possible.
   Combien de monstres aurait-il alors à affronter ?

Partie B

Pour un joueur régulier, on estime que :

s'il gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est $0,7$;

s'il perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est $0,6$.

On note $P_n = \begin{pmatrix} u_n & v_n \end{pmatrix}$ l'état probabiliste lors de la n-ième partie où u_n désigne la probabilité que la partie soit gagnée et v_n celle que la partie soit perdue.

1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste. On nommera les sommets U (pour la partie gagnée) et V (pour la partie perdue).
2. En déduire la matrice de transition en considérant les sommets dans l'ordre U, V.
3. On suppose la première partie perdue, l'état probabiliste initial est donc $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   Montrer que la probabilité que le joueur gagne la 3$^{\text{e}}$ partie est $0,52$.
4. Déterminer la probabilité que le joueur gagne la 15$^{\text{e}}$ partie.
   Arrondir le résultat au centième.

retour au tableau

28. Pondichéry avril 2014

Les parties A et B sont indépendantes

Deux sociétés, Ultra-eau (U) et Vital-eau (V), se partagent le marché des fontaines d'eau à bonbonnes dans les entreprises d'une grande ville.

Partie A

En 2013, l'entreprise U avait 45 % du marché et l'entreprise V le reste. Chaque année, l'entreprise U conserve 90 % de ses clients, les autres choisissent l'entreprise V. Quant à l'entreprise V, elle conserve 85 % de ses clients, les autres choisissent l'entreprise U.
On choisit un client au hasard tous les ans et on note pour tout entier naturel n :

u_n la probabilité qu'il soit un client de l'entreprise U l'année $2013+n$, ainsi $u_0 = 0,45$;

v_n la probabilité qu'il soit un client de l'entreprise V l'année $2013+n$.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets U et V.
2. Donner v_0, calculer u_1 et v_1.
3. On considère l'algorithme (incomplet) donné en annexe. Celui-ci doit donner en sortie les valeurs de u_n et v_n pour un entier naturel n saisi en entrée.
   Compléter les lignes (L5) et (L8) de l'algorithme pour obtenir le résultat attendu.
4. On admet que, pour tout nombre entier naturel $n, u_{n+1} = 0,75u_n + 0,15$. On note, pour tout nombre entier naturel $n, w_n = u_n - 0,6$.
   (a) Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $0,75$.
   (b) Quelle est la limite de la suite (w_n) ? En déduire la limite de la suite (u_n). Interpréter le résultat dans le contexte de cet exercice.

Partie B

L'entreprise U fournit ses clients en recharges pour les fontaines à eau et dispose des résultats antérieurs suivants :

Nombre de recharges en milliers	1	3	5
Coût total annuel de production en centaines d'euros	11	27,4	83

Le coût total de production est modélisé par une fonction C définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,10]$ par :

$$C(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 10 \qquad a, b \text{ et } c \text{ sont des nombres réels.}$$

Lorsque le nombre x désigne le nombre de milliers de recharges produites, $C(x)$ est le coût total de production en centaines d'euros.
On admet que le triplet (a, b, c) est solution du système (S).

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{lcl} a+b+c & = & 1\\ 27a+9b+3c & = & 17,4\\ 125a+25b+5c & = & 73 \end{array}\right. \text{ et on pose } X = \begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}.$$

1. (a) Écrire ce système sous la forme $MX = Y$ où M et Y sont des matrices que l'on précisera.
   (b) On admet que la matrice M est inversible. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le triplet (a, b, c) solution du système (S).
2. En utilisant cette modélisation, quel serait le coût total annuel de production pour 8 000 recharges d'eau produites ?

Annexe à l'exercice 2
Recopier sur la copie la partie « traitement » (lignes L3 à L9) en complétant les lignes L5 et L8.

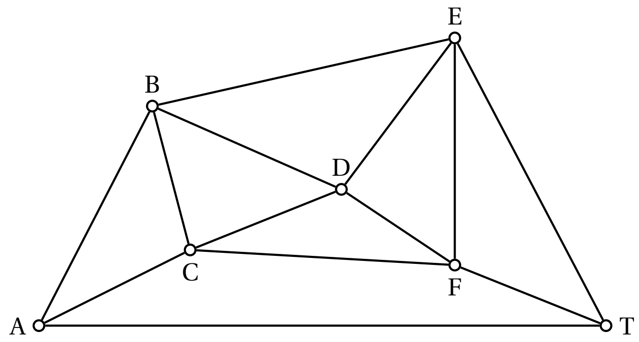
Variables :	N est un nombre entier naturel non nul
	U et V sont des nombres réels
Traitement :	Saisir une valeur pour N
	Affecter à U la valeur 0,45
	Affecter à V la valeur ......
	Pour i allant de 1 jusqu'à N
	Affecter à U la valeur $0,9 \times U + 0,15 \times V$
	Affecter à V la valeur ......
	Fin Pour
Sortie :	Afficher U et Afficher V

retour au tableau

29. Polynésie juin 2014

Partie A

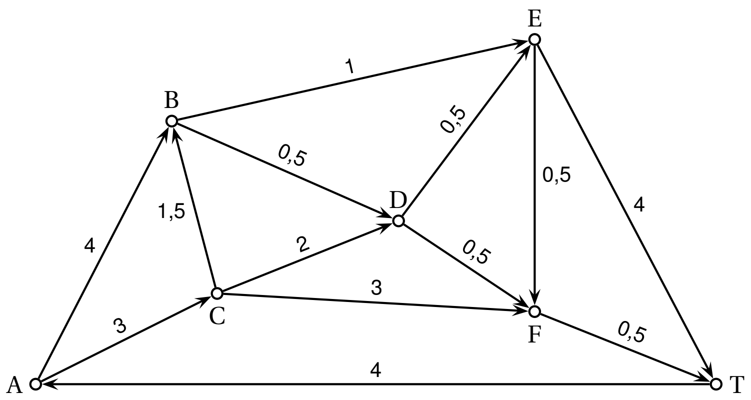
Le graphe ci-dessous représente, dans un aéroport donné, toutes les voies empruntées par les avions au roulage. Ces voies, sur lesquelles circulent les avions avant ou après atterrissage, sont appelées *taxiways*.
Les arêtes du graphe représentent les voies de circulation (les « taxiways ») et les sommets du graphe sont les intersections.



1. Déterminer le nombre de voies de circulation au total.
2. Afin que l'aéroport soit déneigé le plus rapidement possible, est-il possible de planifier un parcours pour que les chasse-neige passent par toutes les voies sans emprunter plusieurs fois la même route ? Justifier la réponse et donner un tel parcours.

Partie B

Dans le graphe ci-dessous, on a indiqué le sens de circulation pour les avions dans les différentes voies ainsi que le temps de parcours pour chacune en minute(s).



1. (a) Écrire la matrice M associée à ce graphe (ranger les sommets dans l'ordre alphabétique).
   (b) Citer tous les chemins de longueur 3 reliant A à T.
2. L'avion qui a atterri est en bout de piste en A et doit se rendre le plus rapidement possible au terminal situé au point T. Déterminer l'itinéraire le plus rapide et en donner la durée.

retour au tableau

30. Métropole juin 2014

Alice participe à une compétition de tir à l'arc ; elle effectue plusieurs lancers de flèches.
Lorsqu'elle atteint la cible à un lancer, la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à $0,9$.
Lorsqu'elle a manqué la cible à un lancer, Alice se déconcentre et la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à $0,4$.
On suppose qu'au premier lancer, elle a autant de chances d'atteindre la cible que de la manquer.
Pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on note :

a_n la probabilité qu'Alice atteigne la cible au n-ième lancer ;

b_n la probabilité qu'Alice manque la cible au n-ième lancer ;

$P_n = (a_n \quad b_n)$ la matrice ligne traduisant l'état probabiliste au n-ième lancer.

1. (a) Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B (A représentant l'état « Alice atteint la cible » et B l'état « Alice manque sa cible »).
   (b) Indiquer la matrice de transition M associée à ce graphe. On prendra les sommets A et B dans l'ordre (A, B).
   (c) Justifier que $P_1 = (0,5 \quad 0,5)$ et $P_2 = (0,65 \quad 0,35)$.
2. (a) Montrer que, pour tout nombre entier n strictement positif, $a_{n+1} = 0,9a_n + O,4b_n$.
   (b) En déduire que, pour tout nombre entier n strictement positif, $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,4$.
3. (a) Compléter l'algorithme fourni en annexe 1 de façon à ce qu'il affiche l'état probabiliste au n-ième lancer.
   (b) Déterminer l'affichage de cet algorithme pour $n = 5$.
4. (a) On considère la suite (u_n) définie pour tout nombre entier naturel n strictement positif par : $u_n = a_n - 0,8$.
   Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   (b) Donner l'expression de u_n en fonction de n, puis en déduire que pour tout nombre entier naturel n strictement positif, $a_n = 0,8 - 0,3 \times 0,5^{n-1}$.
   (c) À long terme, que peut-on penser de la probabilité qu'Alice atteigne la cible ?
   (d) Par quelle autre méthode aurait-on pu trouver le résultat précédent ?

Annexe à rendre avec la copie

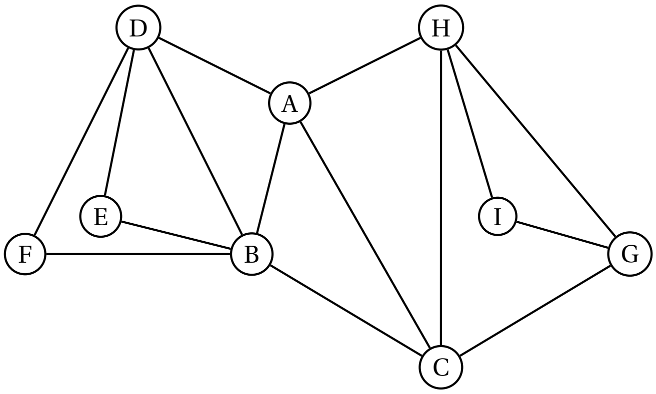
Entrées	
	Saisir n
Traitement	
	a prend la valeur 0,5
	b prend la valeur 0,5
	Pour i allant de 2 à n
	a prend la valeur ...... $\times a + \ldots$
	b prend la valeur $1 - a$
	Fin Pour
Sortie	
	Afficher a, b

retour au tableau

31. Centres Etrangers 2014

Partie A : Étude d'un graphe

On considère le graphe $\mathscr{G}$ ci-dessous.



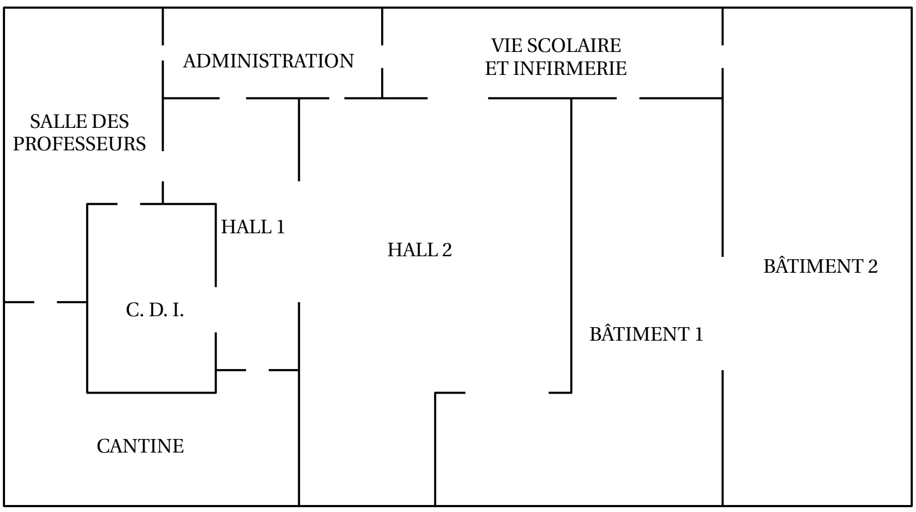
1. (a) Déterminer en justifiant si le graphe $\mathscr{G}$ est complet.
   (b) Déterminer en justifiant si le graphe $\mathscr{G}$ est connexe.
2. (a) Donner le degré de chacun des sommets du graphe $\mathscr{G}$.
   (b) Déterminer en justifiant si le graphe $\mathscr{G}$ admet un cycle eulérien ou une chaîne eulérienne.
3. (a) Donner la matrice M associée au graphe $\mathscr{G}$ (les sommets seront rangés dans l'ordre alphabétique).
   (b) On donne : $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   Montrer, par le calcul, que le coefficient de la septième ligne et quatrième colonne de la matrice M^3 est égal à 3.

Partie B : Applications

Dans cette partie, on pourra justifier les réponses en s'aidant de la partie A

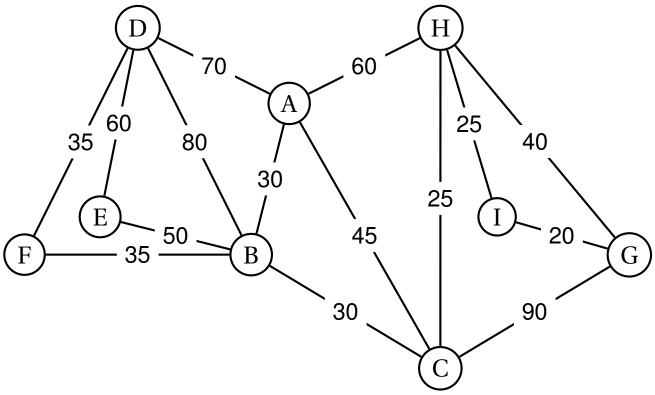
On donne ci-dessous le plan simplifié d'un lycée



1. Le graphe $\mathscr{G}$ donné en partie A modélise cette situation.
   Recopier et compléter le tableau suivant :

Sommet du graphe $\mathscr{G}$	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Lieu correspondant dans le lycée									

2. Un élève a cours de mathématiques dans le bâtiment 1. À la fin du cours, il doit rejoindre la salle des professeurs pour un rendez vous avec ses parents.
   Déterminer le nombre de chemins en trois étapes permettant à l'élève de rejoindre ses parents puis indiquer quels sont ces chemins.
3. Le lycée organise une journée portes-ouvertes.
   (a) Déterminer, en justifiant, s'il est possible de visiter le lycée en empruntant une seule fois chaque passage entre les différents lieux.
   (b) Sur les arêtes du graphe $\mathscr{G}$ sont indiqués les temps de parcours exprimés en seconde entre deux endroits du lycée.



Déterminer, à l'aide de l'algorithme de Dijkstra, le chemin permettant de relier le sommet G au sommet D en un temps minimal.
Déterminer ce temps minimal, exprimé en seconde.

retour au tableau

32. Asie juin 2014

Partie A

Une entreprise E commande chaque semaine ses fournitures auprès de deux fournisseurs A et H.
Les constats faits les premières semaines conduisent à modéliser l'évolution du choix du fournisseur pour les commandes d'une semaine à l'autre par un graphe probabiliste de sommets A et H où :

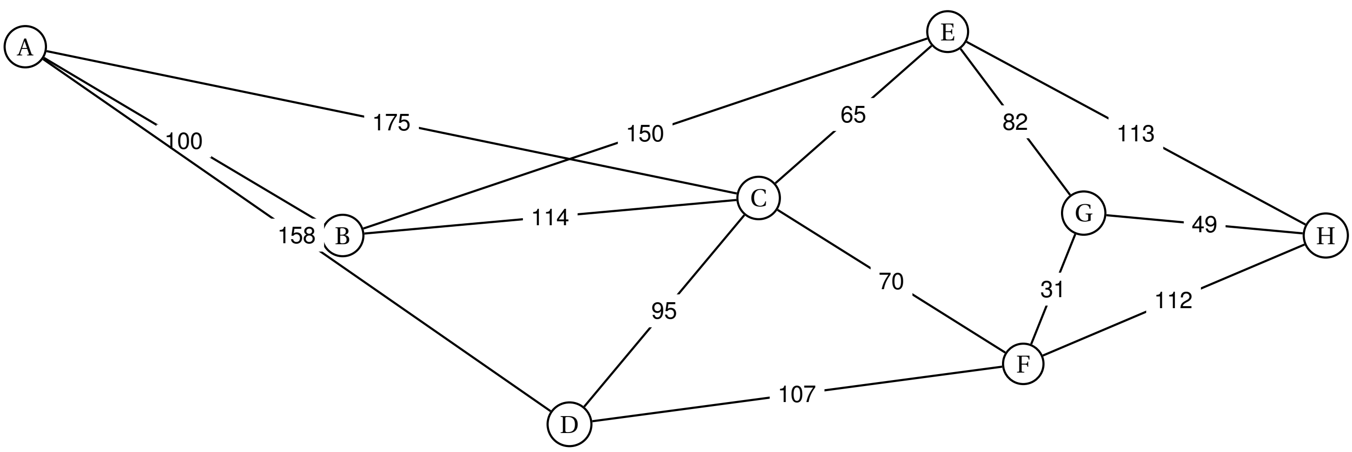
- A désigne l'état : « La commande est passée auprès du fournisseur A » ;
- H désigne l'état : « La commande est passée auprès du fournisseur H ».

La matrice de transition M de ce graphe, en considérant les sommets dans l'ordre A et H, est $M = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$.

1. Dessiner le graphe probabiliste associé à la matrice M.
2. Donner la signification du nombre $0,95$ dans la matrice M.
   Pour tout entier naturel n, on note :
   — a_n la probabilité de l'évènement : « La semaine n, l'entreprise E commande ses fournitures auprès du fournisseur A » ;
   — h_n la probabilité de l'évènement : « La semaine n, l'entreprise E commande ses fournitures auprès du fournisseur H » ;
   — P_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n & h_n \end{pmatrix}$ correspondant à l'état probabiliste pour la semaine n.
3. Vérifier que la matrice ligne $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ correspond à l'état stable du système. En donner une interprétation.
4. On donne $P_0 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$ et on rappelle que $P_k = P_0 \times M^k$, pour k entier naturel.
   Déterminer la semaine où, pour la première fois, la probabilité que l'entreprise E commande ses fournitures auprès du fournisseur A dépasse la probabilité qu'elle les commande auprès du fournisseur H.

Partie B

Le directeur de l'entreprise E rend visite à ses fournisseurs, il se rend du fournisseur A au fournisseur H et souhaite effectuer le moins de kilomètres possible.
Son assistant dresse le graphe suivant qui schématise les trajets, en kilomètres, entre les six villes de la région, notées B ; C ; D ; E ; F et G et les deux sites, A et H.



Déterminer l'itinéraire le plus court reliant les deux sites A et H et indiquer le nombre de kilomètres à effectuer. Justifier la réponse.
retour au tableau

33. Antilles juin 2014

Les services commerciaux d'une grande surface de produits alimentaires ont défini un profil de client qui a été appelé « consommateur bio ».

Sur la base d'observations réalisées les années précédentes, il a été constaté que :

90 % des clients « consommateur bio » maintenaient cette pratique l'année suivante ;

15 % des clients n'ayant pas le profil de « consommateur bio » entraient dans la catégorie « consommateur bio » l'année suivante.

On suppose que cette évolution se poursuit d'une année à l'autre à partir de 2013, année au cours de laquelle il a été constaté que 20 % des clients ont le profil « consommateur bio ».
Par un tirage aléatoire effectué tous les ans, on choisit un client de cette grande surface.
Pour tout nombre entier naturel n on note :

b_n, la probabilité que le client choisi lors de l'année 2013 + n soit un « consommateur bio » ;

c_n, la probabilité que le client choisi lors de l'année $2013+n$ ne soit pas un « consommateur bio » ;

P_n, la matrice ligne $(b_n \ c_n)$ donnant l'état probabiliste lors de l'année $2013+n$.

1. (a) Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets B et C où B correspond à l'état « consommateur bio ».
   (b) Donner P_0 l'état probabiliste en 2013 et la matrice M de transition correspondant à ce graphe, les sommets B et C étant classés dans cet ordre.
   (c) On donne la matrice M^2 :
   $$M^2 = \begin{pmatrix} 0,825 & 0,175 \\ 0,2625 & 0,7375 \end{pmatrix}.$$
   En précisant la méthode de calcul, déterminer la probabilité que le client choisi en 2015 soit un « consommateur bio ».
   (d) Déterminer l'état stable $(b \ c)$ du graphe probabiliste.
2. Le directeur du supermarché affirme que, dans un futur proche, plus de la moitié de sa clientèle aura le profil de « consommateur bio ».
   (a) Recopier et compléter l'algorithme suivant qui doit permettre de déterminer le nombre minimal d'années pour que l'affirmation du directeur soit vérifiée.

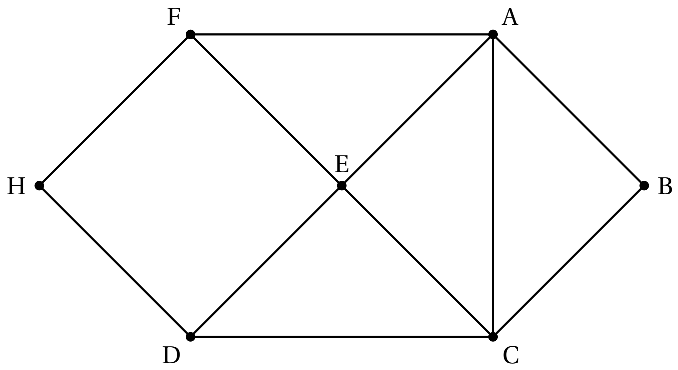
```
Variables :     N un nombre entier naturel non nul
                B un nombre réel
Traitement :    Affecter à N la valeur 0
                Affecter à B la valeur 0,2
                Affecter à C la valeur 0,8
                Tant que ...
                   | affecter à B la valeur 0,9 × B + 0,15 × C
                   | affecter à C la valeur 1 − B
                   | affecter à N la valeur N + 1
                Fin Tant que
Sortie :        Afficher ...
```

   (b) Déterminer le nombre minimal d'années recherché en expliquant la démarche.

retour au tableau

34. Liban mai 2014

On a schématisé ci-dessous le plan d'une MJC (Maison de la Jeunesse et de la Culture) par un graphe dont les sommets sont les salles et les arêtes sont les passages (portes, couloirs ou escaliers) entre les salles. On appelle H le hall d'entrée et B le bureau du directeur.

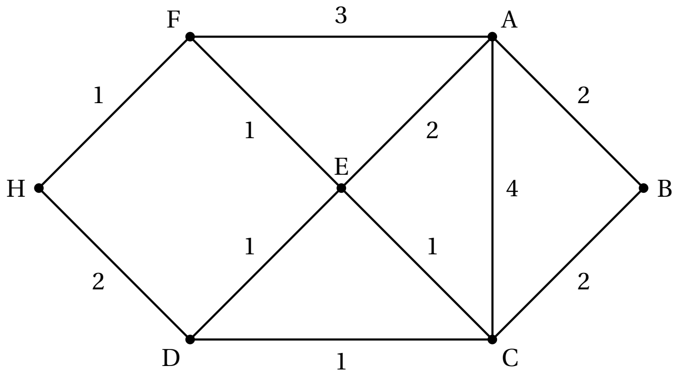


En fin de journée, un agent de service fait le tour de la MJC pour récupérer dans chaque salle (bureau du directeur et hall inclus) les objets oubliés par les enfants.

1. Préciser si ce graphe est connexe en justifiant la réponse.
2. Déterminer, en justifiant, si l'agent de service peut passer par toutes les salles en utilisant une fois et une seule chaque passage.
3. On range les sommets par ordre alphabétique.
   Donner la matrice d'adjacence M associée au graphe.
4. On donne :

$$M^4 = \begin{pmatrix} 31 & 15 & 26 & 21 & 27 & 18 & 12 \\ 15 & 12 & 15 & 12 & 18 & 12 & 6 \\ 26 & 15 & 31 & 18 & 27 & 21 & 12 \\ 21 & 12 & 18 & 20 & 17 & 18 & 5 \\ 27 & 18 & 27 & 17 & 34 & 17 & 16 \\ 18 & 12 & 21 & 18 & 17 & 20 & 5 \\ 12 & 6 & 12 & 5 & 16 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

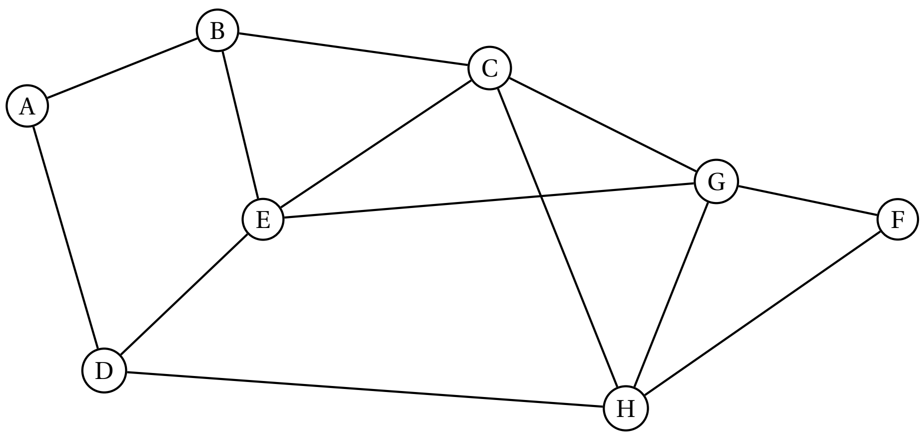
   En déduire le nombre de chemins de longueur 4 entre les sommets B et H.
5. On a indiqué sur le graphe ci-dessous le temps en minute mis pour passer entre les différentes salles en ouvrant et fermant les portes à clé.



retour au tableau

35. Amérique du Nord 2014

Lors d'une campagne électorale, un homme politique doit effectuer une tournée dans les villes A, B, C, D, E, F, G et H, en utilisant le réseau autoroutier. Le graphe $\mathcal{G}$ ci-dessous, représente les différentes villes de la tournée et les tronçons d'autoroute reliant ces villes (une ville est représentée par un sommet, un tronçon d'autoroute par une arête) :



PARTIE A

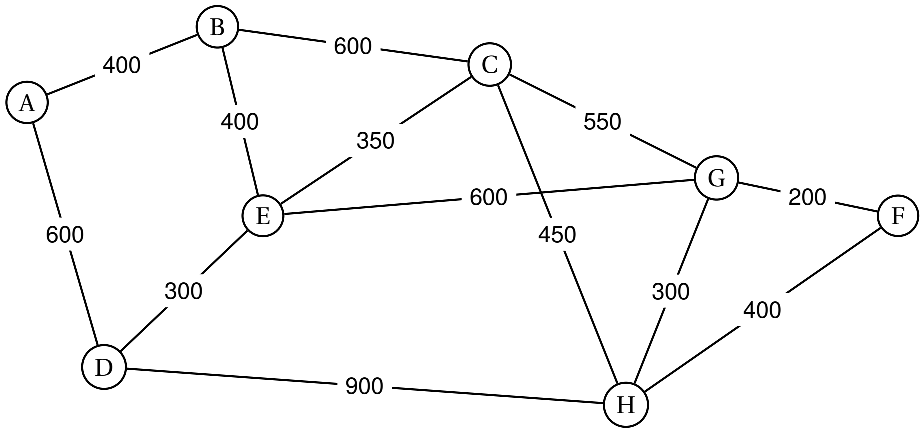
1. Déterminer, en justifiant, si le graphe $\mathcal{G}$ est :
   (a) complet ;
   (b) connexe.
2. (a) Justifier qu'il est possible d'organiser la tournée en passant au moins une fois par chaque ville, tout en empruntant une fois et une seule chaque tronçon d'autoroute.
   (b) Citer un trajet de ce type.
3. On appelle M la matrice d'adjacence associée au graphe $\mathcal{G}$ (les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique).
   (a) Déterminer la matrice M.
   (b) On donne la matrice

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & 5 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 7 & 2 & 8 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 6 & 4 & 9 & 3 & 9 & 10 \\ 5 & 2 & 4 & 0 & 9 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 8 & 9 & 9 & 4 & 4 & 10 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 4 & 2 & 6 & 6 \\ 4 & 3 & 9 & 3 & 10 & 6 & 6 & 9 \\ 1 & 5 & 10 & 8 & 4 & 6 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

   Déterminer, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 reliant E à H.
   Préciser ces chemins.

PARTIE B

Des contraintes d'organisation obligent cet homme politique à se rendre dans la ville F après la ville A.
Le graphe $\mathcal{G}$ est complété ci-dessous par les longueurs en kilomètre de chaque tronçon d'autoroute.



Déterminer, en utilisant l'algorithme de Dijkstra, le trajet autoroutier le plus court pour aller de A à F.
Préciser la longueur en kilomètre de ce trajet.
retour au tableau

36. Nouvelle Calédonie mars 2014

On a observé l'évolution des inscriptions dans le club de gymnastique d'une ville.

Chaque année, 30 % des personnes inscrites au club de gymnastique l'année précédente renouvellent leur inscription au club.
De plus, chaque année, 10 % des habitants de la ville qui n'étaient pas inscrits au club l'année précédente s'y inscrivent.

On appelle n le nombre d'années d'existence du club.
On note g_n la proportion de la population de la ville inscrite au club de gymnastique lors de l'année n et p_n la proportion de la population qui n'y est pas inscrite.
La première année de fonctionnement du club (année « zéro »), 20 % des habitants de la ville se sont inscrits.
On note $E_n = \begin{pmatrix} g_n & p_n \end{pmatrix}$ la matrice traduisant l'état probabiliste de l'année n. On a donc $E_0 = (0,2 \quad 0,8)$.

1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste.
2. On nomme A la matrice de transition associée à cette situation, c'est-à-dire la matrice vérifiant : pour tout entier naturel n, $E_{n+1} = E_n \times A$.
   Donner la matrice A.
3. Déterminer E_1 et E_2. Interpréter les résultats.
4. Déterminer l'état probabiliste stable (on donnera les coefficients de la matrice ligne sous la forme de fractions irréductibles).
   Comment peut-on interpréter ce résultat ?

retour au tableau

37. Nouvelle Calédonie nov 2013

Dans la commune de Girouette, deux partis s'affrontent aux élections tous les ans.
En 2010, le parti Hirondelle l'a emporté avec 70 % des voix contre 30 % au parti Phénix.
On admet qu'à partir de l'année 2010 :

14 % des électeurs votant pour le parti Hirondelle à une élection voteront pour le parti Phénix à l'élection suivante.

6 % des électeurs votant pour le parti Phénix à une élection voteront pour le parti Hirondelle à l'élection suivante.

Les autres ne changent pas d'avis.

On considère un électeur de Girouette choisi au hasard.
On note H l'état « L'électeur vote pour le parti Hirondelle » et P l' état « L'électeur vote pour le parti Phenix ».

1. (a) Représenter le graphe probabiliste associé à cette situation.

   (b) Déterminer la matrice de transition M en considérant les états dans l'ordre alphabétique.

2. On appelle $E_n = \begin{pmatrix} h_n & p_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne de l'état probabiliste de l'année $2010 + n$.
   On a donc $E_0 = (0,7 \quad 0,3)$.
   Déterminer E_1 et E_4. (On arrondira les coefficients de E_4 au centième). Interpréter les résultats.

3. (a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $h_{n+1} = 0,8h_n + 0,06$.

   (b) On définit la suite (u_n) par : pour tout entier naturel n, $u_n = h_n - 0,3$.
   Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique.

   (c) Montrer que pour tout entier naturel n, $h_n = 0,3 + 0,4 \times 0,8^n$.

4. À partir de combien d'années la probabilité qu'un électeur choisi au hasard vote pour le parti Hirondelle sera-t-elle strictement inférieure à 0,32 ?

retour au tableau

38. Amérique du sud nov 2013

Une étude est réalisée chaque hiver sur une population composée de personnes qui peuvent pratiquer le ski de piste ou le snowboard.
L'étude révèle que :

- Si une personne pratique le ski de piste, alors la probabilité qu'elle pratique le snowboard l'hiver suivant est égale à $0,2$.
- Si une personne pratique le snowboard, alors la probabilité qu'elle pratique le ski de piste l'hiver suivant est égale à $0,3$.

On note S l'état : « la personne pratique le ski de piste » et $\overline{S}$ l'état : « la personne pratique le snowboard ».
On note également pour tout entier naturel n :

- p_n la probabilité qu'une personne pratique le ski de piste lors du n-ième hiver ;
- q_n la probabilité qu'une personne pratique le snowboard lors du n-ième hiver ;
- $P_n = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste du système lors du n-ième hiver.

On suppose que la population initiale ne comporte que des personnes pratiquant le ski de piste, on a donc $P_0 = (1 \quad 0)$.

Partie A

1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste de sommets S et $\overline{S}$.
2. (a) Donner la matrice de transition M de ce graphe probabiliste.
   (b) Calculer M^2.
   (c) Déterminer l'état probabiliste P_2.
3. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,3$.
4. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	
①	J et N sont des entiers naturels
②	p est un nombre réel
Entrée :	
③	Saisir N
Initialisation :	
④	p prend la valeur 1
Traitement :	
⑤	Pour J allant de 1 à N
⑥	p prend la valeur ....
⑦	Fin Pour
Sortie :	
⑧	Afficher p

Recopier et compléter la ligne ⑥ de cet algorithme afin d'obtenir la probabilité p_N.

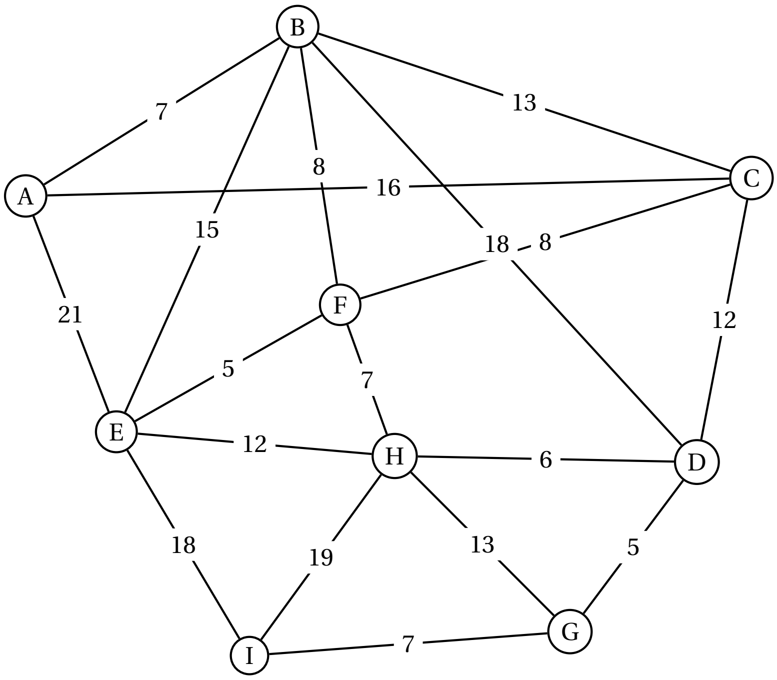
Partie B

On considère, pour tout entier naturel n, l'évènement S_n : « la personne pratique le ski de piste lors du n-ième hiver ». La probabilité de l'évènement S_n est notée $p(S_n)$. On a donc $p_n = p(S_n)$.
On sait d'après la **partie A** que pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,3$.
Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = p_n - 0,6$.

1. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $0,5$ et préciser la valeur de u_0.
2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n puis l'expression de p_n en fonction de n.
3. Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter le résultat.

Partie C

Une partie du domaine skiable est représentée par le graphe ci-dessous.
Le sommet A représente le haut des pistes de ski et le sommet I en représente le bas.
Les sommets B, C, D, E, F, G et H représentent des points de passages.
Chacune des arêtes est pondérée par la distance, en centaine de mètres, entre deux sommets.



Déterminer, à l'aide de l'algorithme de Dijkstra, la distance minimale permettant de relier le sommet A au sommet I.
retour au tableau

39. Métropole sept 2013

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Un lycée d'une grande ville de province organise un forum des grandes écoles de la région pour aider ses élèves dans leurs choix d'orientation post-bac.

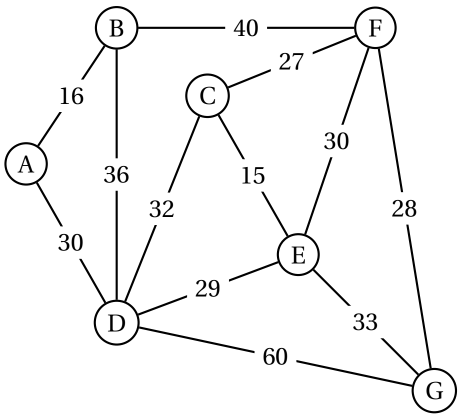
PARTIE A

Une des écoles a effectué une étude sur la mobilité des étudiants de la promotion de 2008 en ce qui concerne les choix de carrière.
Elle a relevé qu'en 2008, à la fin de leurs études, 25 % des diplômés sont partis travailler à l'étranger alors que le reste de la promotion a trouvé du travail en France.
On a observé ensuite qu'à la fin de chaque année, 20 % des personnes ayant opté pour l'étranger reviennent sur un poste en France alors que 10 % des personnes travaillant en France trouvent un poste à l'étranger. On considère que cette situation perdure.
On note $P_n = (e_n \quad l_n)$ la matrice correspondant à l'état probabiliste en $2008 + n$, avec e_n la probabilité que la personne travaille à l'étranger, l_n celle qu'elle travaille en France.
Ainsi $P_0 = (0{,}25 \quad 0{,}75)$.

1. Proposer le graphe probabiliste associé à cette situation. On désignera par E (étranger) et F (France) les deux sommets.
2. Donner la matrice de transition M associée en prenant les sommets dans l'ordre E puis F.
3. Montrer qu'en 2011, la proportion des étudiants de la promotion 2008 travaillant à l'étranger est de 30,475 %.
4. Déterminer l'état stable du graphe probabiliste et interpréter le résultat obtenu.

PARTIE B

Pour clôturer cette journée, un groupe de lycéens musiciens a décidé d'organiser un concert. Ils décident de faire le tour de tous les lycées de la ville et de distribuer des prospectus sur le trajet pour faire de la publicité pour cette soirée. Les membres du groupe ont établi le graphe ci-contre. Les sommets représentent les différents lycées et les arêtes, les rues reliant les établissements. Les arêtes sont pondérées par les durées des trajets entre deux sommets consécutifs, exprimées en minutes.



1. Existe- t -il un trajet d'un lycée à un autre permettant de parcourir toutes les rues une fois et une seule ?
   Si oui, donner un tel trajet, si non expliquer pourquoi.
2. Arrivé en retard au lycée A, un membre du groupe veut trouver le chemin le plus rapide pour rejoindre ses camarades au lycée G. Quel trajet peut-il prendre ? Quelle est alors la durée du parcours ?

retour au tableau

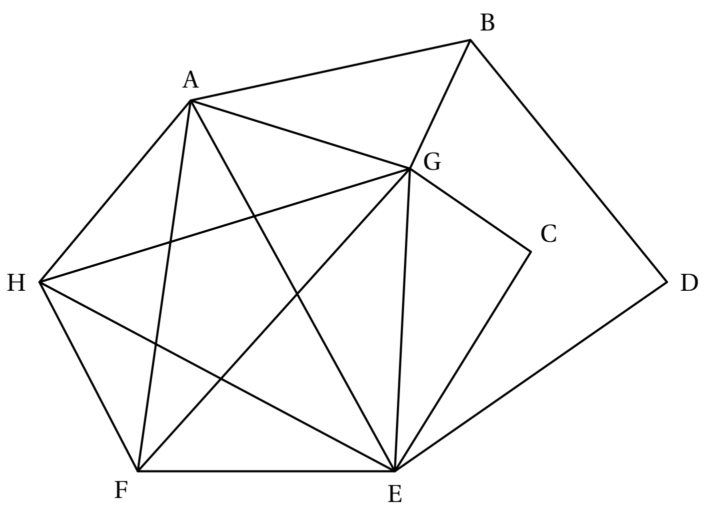
40. Antilles sept 2013

Une entreprise de produits cosmétiques fait réaliser une étude marketing sur une population donnée.

Cette étude montre que lors de la sortie d'une nouvelle crème hydratante, la probabilité qu'une cliente l'achète lors de la première vente promotionnelle est de 0,2.
De plus, lorsqu'une cliente a acheté une crème hydratante lors d'une vente promotionnelle, la probabilité qu'elle en achète à nouveau lors de la vente promotionnelle suivante est de 0,8. Lorsqu'une cliente n'a pas acheté de crème hydratante, la probabilité pour qu'elle en achète à la vente promotionnelle suivante est de 0,3.
n étant un entier naturel non nul, on note :

- a_n la probabilité qu'une cliente achète une crème hydratante lors de la n-ième vente promotionnelle.
- b_n la probabilité qu'une cliente n'achète pas une crème hydratante lors de la n-ième vente promotionnelle.
- $P_n = (a_n \quad b_n)$ la matrice ligne traduisant l'état probabiliste à la n-ième vente promotionnelle.

1. (a) Déterminer P_1.
   (b) Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets :
   V quand il y a achat ;
   $\overline{V}$ quand il n'y a pas achat.
2. (a) Écrire la matrice M de transition associée à ce graphe.
   (b) Calculer P_2 et P_3. D'après ces résultats, quel est l'effet de ces trois premières ventes promotionnelles ?
3. Justifier qu'il existe un état stable $P = (a \quad b)$ pour cette situation. Le déterminer.
4. L'étude marketing montre que certains produits ne sont jamais achetés simultanément. On représente les incompatibilités par le graphe suivant, où deux sommets reliés représentent deux produits qui ne sont jamais dans une même commande. Par exemple, les produits A et B, représentés par des sommets reliés, ne sont jamais dans une même commande.

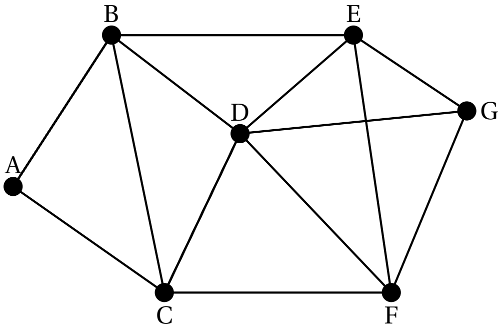


L'entreprise souhaite répartir les produits dans des lots constitués de produits ne présentant aucune incompatibilité d'achat. Combien de lots doit-elle prévoir au minimum ? Justifier votre réponse à l'aide d'un algorithme et proposer une répartition des produits.

retour au tableau

41. Pondichery avril 2013

On considère le graphe Γ ci-dessous :

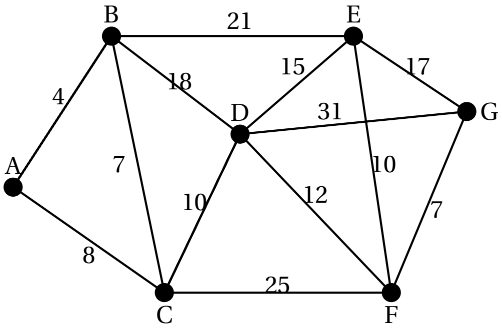


PARTIE A

1. Ce graphe admet-il une chaîne eulérienne ? Justifier la réponse. Si oui donner une telle chaîne.
2. Ce graphe admet-il un cycle eulérien ? Justifier la réponse. Si oui donner un tel cycle.
3. Donner la matrice M associée au graphe Γ. Les sommets seront pris dans l'ordre alphabétique : A, B, C, D, E, F, G.

PARTIE B

Une région est munie d'un réseau de trains, représenté par le graphe Γ ci-dessous.
Les stations sont symbolisées par les sommets A, B, C, D, E, F et G. Chaque arête représente une ligne reliant deux gares. Les temps de parcours (correspondance comprise) en minutes entre chaque sommet ont été rajoutés sur le graphe.



1. Déterminer le plus court chemin en minutes, reliant la gare B à la gare G.
   Justifier la réponse grâce à un algorithme.
2. Quelle est la longueur en minutes de ce chemin ?

retour au tableau

42. Polynésie juin 2013

Les parties A et B sont indépendantes

Alors qu'une entreprise A possédait le monopole de l'accès à internet des particuliers, une entreprise concurrente B est autorisée à s'implanter.
Lors de l'ouverture au public en 2010 des services du fournisseur d'accès B, l'entreprise A possède 90% du marché et l'entreprise B possède le reste du marché.
Dans cet exercice, on suppose que chaque année, chaque internaute est client d'une seule entreprise A ou B.
On observe à partir de 2010 que chaque année, 15% des clients de l'entreprise A deviennent des clients de l'entreprise B, et 10% des clients de l'entreprise B deviennent des clients de l'entreprise A.
Pour tout entier naturel n, on note a_n la probabilité qu'un internaute de ce pays, choisi au hasard, ait son accès à internet fourni par l'entreprise A pour l'année $2010+n$, et b_n, la probabilité pour que son fournisseur d'accès en $2010+n$ soit l'entreprise B.
On note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice correspondant à l'état probabiliste de l'année $2010+n$ et on a ainsi $a_0 = 0,9$ et $b_0 = 0,1$.

PARTIE A

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste.
2. (a) Déterminer la matrice de transition M de ce graphe.
   (b) Montrer qu'en 2013, l'état probabiliste est environ $\begin{pmatrix} 0,61 & 0,39 \end{pmatrix}$.
   (c) Déterminer l'état stable $P_n = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ de la répartition des clients des entreprises A et B. Interpréter le résultat.

PARTIE B

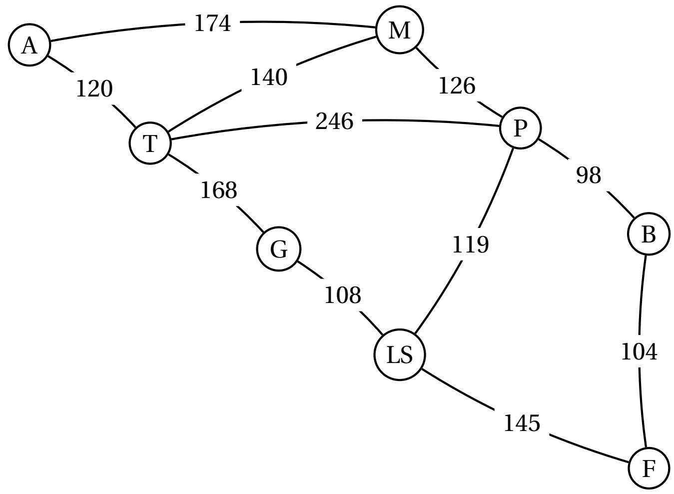
Lors d'une campagne de marketing l'entreprise B distribue un stylo ou un porte-clés ; il en coûte à l'entreprise 0,80 € par stylo et 1,20 € par porte-clés distribué.
À la fin de la journée l'entreprise a distribué 550 objets et cela lui a coûté 540 €.
On cherche le nombre s de stylos et le nombre c de porte-clés distribués.

1. Écrire un système traduisant cette situation.
2. Montrer que le système précédent est équivalent à $R \times X = T$ où $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0,8 & 1,2 \end{pmatrix}$ et X et T sont des matrices que l'on précisera.
3. Résoudre le système à l'aide de la calculatrice. Interpréter le résultat.

retour au tableau

43. Métropole juin 2013

Un chauffeur-livreur réside en Italie dans la ville d'Aoste.
Quatre fois par mois, son employeur l'envoie livrer du matériel informatique dans la ville de Florence.
Il est établi que le trajet en camion coûte, en carburant, 0,51 euro au kilomètre. Le chauffeur dispose d'un budget mensuel de 2 200 euros pour son carburant. Ce qu'il réussit à économiser lui permet de toucher une prime P équivalente en fin de mois.
Il consulte donc la carte routière ci-dessous pour optimiser ses trajets.
Le graphe ci-dessous indique les distances entre différentes villes d'Italie : Aoste, Milan, Parme, Turin, Gènes, La Spézia, Bologne et Florence. Chaque ville est désignée par son initiale.



Les deux parties sont indépendantes.

Partie A : étude du trajet

1. Déterminer le trajet le plus court entre Aoste et Florence. (On indiquera les villes parcourues et l'ordre de parcours).
2. Déterminer le budget carburant nécessaire aux quatre voyages aller-retour du mois (le résultat sera arrondi à l'euro près).
   En déduire le montant de la prime P qui lui sera versée en fin de mois, à l'euro près.

Partie B : traversée de Parme

Durant son trajet, le chauffeur est obligé de traverser Parme et ses très nombreux feux tricolores. Lorsque le feu est orange, le chauffeur se comporte comme lorsqu'il est rouge, il s'arrête.
L'expérience lui a permis d'établir que s'il se présente à un feu, il se produit les évènements suivants :

- Arrivé au feu, celui-ci est au vert (V) : la probabilité que le suivant soit vert est de 0,85.
- Arrivé au feu, celui-ci est orange ou rouge (R) : la probabilité que le suivant soit vert est de 0,30.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste.
2. Indiquer la matrice de transition M du graphe, en considérant les sommets dans l'ordre (V, R) en ligne comme en colonne.
3. Le premier feu rencontré est vert. La matrice P_1 donnant l'état initial est donc $\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer les matrices $P_2 = P_1 \times M$ et $P_3 = P_2 \times M$. (Le détail des calculs n'est pas demandé.)
   (b) Conclure quant à la probabilité p de l'évènement « Le chauffeur doit s'arrêter au troisième feu ».

retour au tableau

44. Métropole dévoilé juin 2013

Dans une entreprise, la société de débit boisson CAFTHÉ installe deux machines : l'une ne sert que du café et l'autre ne sert que du thé.
Chaque jour lors de la pause déjeuner, chaque employé de l'entreprise choisit une boisson, et une seule : café ou thé. On suppose que le nombre total d'employés de l'entreprise reste constant au cours du temps.
La société CAFTHÉ pense que la machine à café sera toujours la plus utilisée. Une enquête, effectuée sur plusieurs jours, auprès des employés pour connaitre leurs choix de boisson a montré que :

- 97 % des employés qui choisissent un café un jour donné prennent encore un café le lendemain.
- 98 % des employés qui choisissent un thé un jour donné prennent encore un thé le lendemain.

On admet que cette tendance se poursuit les jours suivants.

Le premier jour, 70 % des employés ont choisi un café.
On note C l'état « L'employé choisit un café » et T l'état « L'employé choisit un thé ».
Pour tout entier naturel n non nul, on note :

- c_n la probabilité de l'évènement « un employé, pris au hasard, choisit un café le jour n » ;
- t_n la probabilité de l'évènement « un employé, pris au hasard, choisit un thé le jour n » ;
- P_n la matrice $\begin{pmatrix} c_n & t_n \end{pmatrix}$ correspondant à l'état probabiliste le jour n.

1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets C et T.
2. Déterminer la matrice P_1 donnant l'état probabiliste le premier jour.
3. La matrice de transition M de ce graphe, en considérant les sommets dans l'ordre C et T est $M = \begin{pmatrix} 0,97 & 0,03 \\ 0,02 & 0,98 \end{pmatrix}$.
   Déterminer la probabilité, arrondie au centième, qu'un employé choisisse un thé le quatrième jour.
4. (a) Montrer que l'état stable est $\begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$.
   (b) Est-ce que la société CAFTHÉ avait raison quant à l'utilisation de la machine à café à long terme ?
5. (a) Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n.
   En déduire que pour tout entier n, on a $c_{n+1} = 0,95 \times c_n + 0,02$.
   (b) On considère l'algorithme suivant :

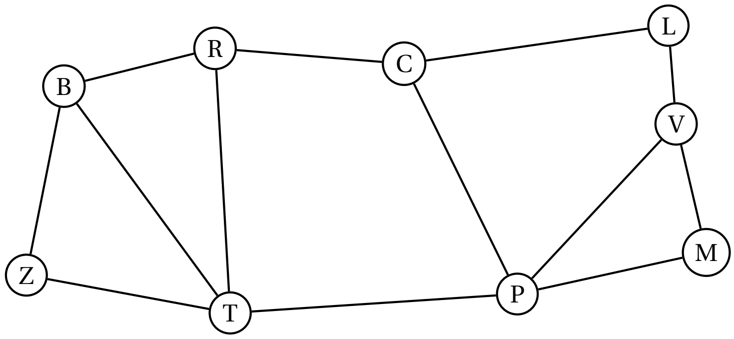
Variables :	A est un réel
	i et n sont des entiers naturels
Entrée :	Saisir n
Initialisation :	Affecter à A la valeur 0,70
Traitement :	Pour i de 1 à n
	Affecter à A la valeur $0,95 \times A + 0,02$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher A

   En faisant apparaître les différentes étapes, donner la valeur affichée par cet algorithme lorsque la valeur de n est égale à 3.
   Que permet de déterminer cet algorithme ?

retour au tableau

45. Liban mai 2013

Le graphe ci-dessous représente les autoroutes entre les principales villes du Sud de la France :
Bordeaux (B), Clermont-Ferrand (C), Lyon (L), Marseille (M), Montpellier (P), Brive (R), Toulouse (T), Valence (V) et Biarritz (Z).

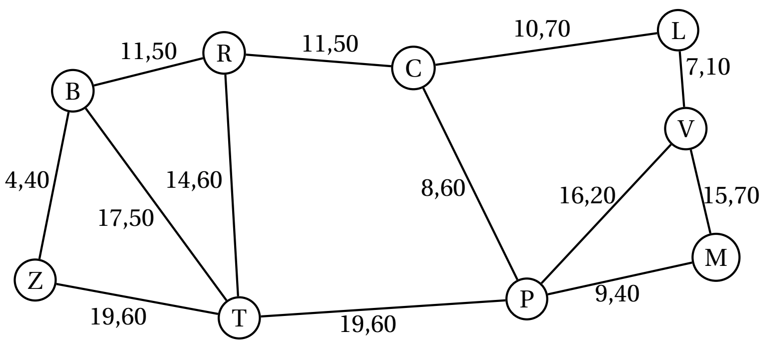


Pour cette question, on justifiera chaque réponse.

1. (a) Déterminer l'ordre du graphe.
   (b) Déterminer si le graphe est connexe.
   (c) Déterminer si le graphe est complet.
2. Un touriste atterrit à l'aéroport de Lyon et loue une voiture.
   Déterminer, en justifiant, s'il pourra visiter toutes les villes en empruntant une et une seule fois chaque autoroute.
3. Il décide finalement d'aller seulement de Lyon à Biarritz.
   On note N la matrice associée au graphe, les sommets étant rangés dans l'ordre alphabétique : B, C, L, M, P, R, T, V, Z.
   Voici les matrices N et N^3 :

$$N = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&1&1&0&1\\ 0&0&1&0&1&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&0&1&1&0\\ 1&1&0&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&1&1&0&0&1\\ 0&0&1&1&1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&1&0&0 \end{pmatrix} \text{ et } N^3 = \begin{pmatrix} 4&2&1&1&3&6&6&1&5\\ 2&0&5&2&8&6&1&1&3\\ 1&5&0&2&1&0&3&5&0\\ 1&2&2&2&5&2&1&4&1\\ 3&8&1&5&2&1&8&7&1\\ 6&6&0&2&1&2&8&3&2\\ 6&1&3&1&8&8&4&1&6\\ 1&1&5&4&7&3&1&2&1\\ 5&3&0&1&1&2&6&1&2 \end{pmatrix}$$

   (a) En détaillant le calcul, déterminer le coefficient de la troisième ligne et dernière colonne de la matrice N^4.
   (b) En donner une interprétation.
4. Sur les arêtes du graphe sont maintenant indiqués les prix des péages en euro.

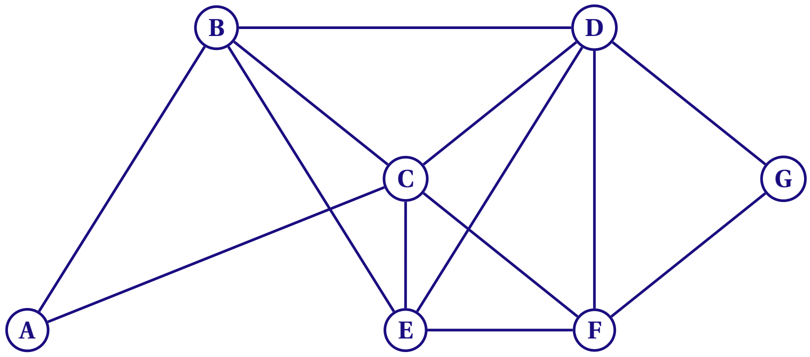


   (a) À l'aide de l'algorithme de Dijkstra, déterminer le chemin que doit prendre le touriste pour minimiser le coût des péages de Lyon à Biarritz.
   (b) Déterminer le coût, en euro, de ce trajet.

retour au tableau

46. Centres étrangers juin 2013

Dans le graphe ci-dessous, les sommets représentent différentes zones de résidence ou d'activités d'une municipalité. Une arête reliant deux de ces sommets indique l'existence d'une voie d'accès principale entre deux lieux correspondants.

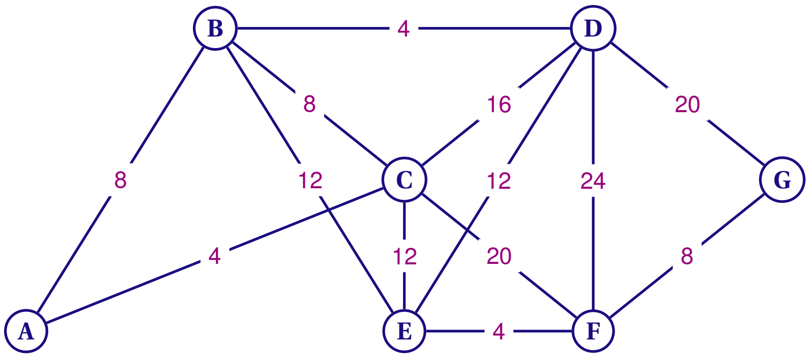


1. Donner, sans justifier, le degré de chacun des sommets (la réponse pourra être présentée sous forme de tableau où les sommets seront mis dans l'ordre alphabétique).
2. (a) Donner la matrice M associée au graphe (les sommets seront mis dans l'ordre alphabétique).

   (b) On donne la matrice $M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 & 5 & 5 & 5 & 3 \\ 7 & 8 & 12 & 13 & 12 & 8 & 5 \\ 8 & 12 & 12 & 15 & 13 & 13 & 5 \\ 5 & 13 & 15 & 12 & 13 & 12 & 8 \\ 5 & 12 & 13 & 13 & 10 & 12 & 5 \\ 5 & 8 & 13 & 12 & 12 & 8 & 7 \\ 3 & 5 & 5 & 8 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

   Déterminer, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 reliant A et F puis donner leur liste.
3. Pour sa campagne électorale, un candidat souhaite parcourir toutes les voies d'accès principales de ce quartier sans emprunter plusieurs fois la même voie.

   Montrer qu'un tel parcours est possible.
4. Dans le graphe ci-dessous, les valeurs indiquent, en minutes, les durées moyennes des trajets entre les différents lieux via les transports en commun.



   Ce même candidat se trouve à la mairie (A) quand on lui rappelle qu'il a un rendez-vous avec le responsable de l'hôpital situé en zone G.

   (a) En utilisant l'algorithme de Dijkstra, déterminer le chemin de durée minimale que ce candidat devra emprunter pour arriver à son rendez-vous.

   (b) Combien de temps faut-il prévoir pour effectuer ce trajet ?

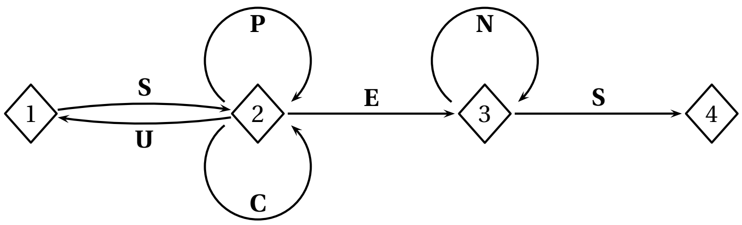
retour au tableau

47. Asie juin 2013

Les deux parties de l'exercice sont indépendantes.

Partie A

Pour accéder à sa messagerie, Antoine a choisi un code qui doit être reconnu par le graphe étiqueté suivant, de sommets 1, 2, 3 et 4 :



Une succession des lettres constitue un code possible si ces lettres se succèdent sur un chemin du graphe orienté ci-dessus, en partant du sommet 1 et en sortant au sommet 4. Les codes SES et SPPCES sont ainsi des codes possibles, contrairement aux codes SUN et SPEN.

1. Parmi les trois codes suivants, écrire sur votre copie le (ou les) code(s) reconnu(s) par le graphe.

   SUCCÈS SCENES SUSPENS

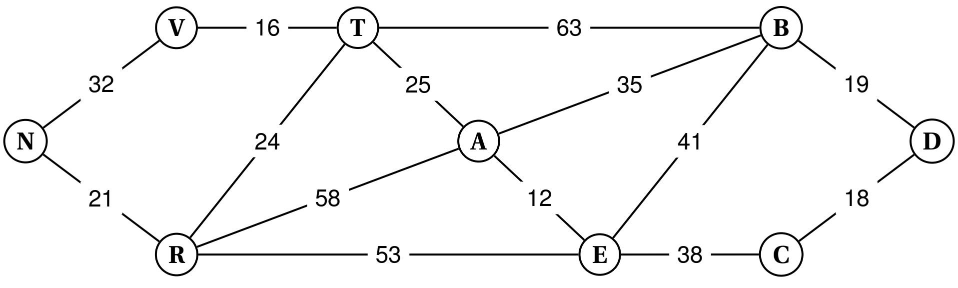
2. Recopier et compléter la matrice d'adjacence A associée au graphe. On prendra les sommets dans l'ordre 1-2-3-4.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

3. Avec une calculatrice on a calculé : $A^4 = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 8 & 3 \\ 12 & 29 & 20 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   En déduire le nombre de codes de 4 lettres reconnus par le graphe. Quels sont ces codes ?

Partie B



Antoine décide d'aller visiter neuf châteaux de la Loire.
Il a construit le graphe ci-dessus où les sommets représentent :

A : Amboise	B : Blois	C : Cheverny	D : Chambord
E : Chenonceau	T : Tours	V : Villandry	R : Azay-le-Rideau
N : Chinon			

Sur les arêtes sont indiquées les distances en km

1. Antoine peut-il partir de Blois et y revenir, en parcourant une et une seule fois chacune des routes matérialisées par les arêtes de ce graphe ? On justifiera la réponse.
2. Déterminer le plus court chemin pour aller du château de Chambord au château de Chinon. On donnera le parcours ainsi que le nombre total de kilomètres.

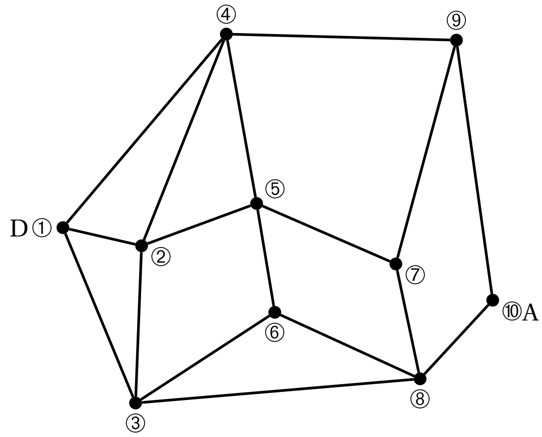
retour au tableau

48. Antilles juin 2013

Un guide de randonnée en montagne décrit les itinéraires possibles autour d'un pic rocheux.
La description des itinéraires est donnée par le graphe ci-contre. Les sommets de ce graphe correspondent aux lieux remarquables. Les arêtes de ce graphe représentent les sentiers possibles entre ces lieux.

Légende :

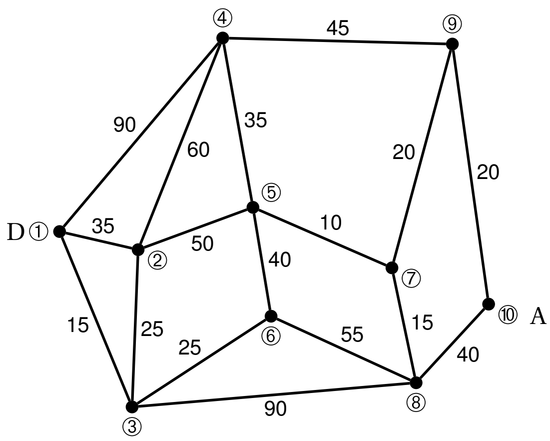
①	Départ	②	Passerelle
③	Roche percée	④	Col des 3 vents
⑤	Pic rouge	⑥	Refuge
⑦	Col vert	⑧	Pont Napoléon
⑨	Cascade des anglais	⑩	Arrivée



1. Donner un itinéraire allant de D à A passant par tous les sommets du graphe une seule fois mais n'empruntant pas forcément tous les sentiers.
2. Existe-t-il un itinéraire allant de D à A utilisant tous les sentiers une seule fois ?
   Justifier votre réponse.
3. On note M la matrice d'adjacence associée à ce graphe, les sommets étant pris dans l'ordre. On donne ci-contre M^5.
   (a) Que représente le nombre 89 situé sur la deuxième ligne et la quatrième colonne ?
   (b) Déterminer le nombre d'itinéraires allant de D à A empruntant 5 sentiers. Citer un tel itinéraire passant par le pic rouge.

$$M^5 = \begin{pmatrix} 56 & 78 & 75 & 82 & 59 & 57 & 54 & 40 & 26 & 31 \\ 78 & 88 & 95 & 89 & 96 & 57 & 50 & 65 & 48 & 30 \\ 75 & 95 & 68 & 68 & 77 & 68 & 46 & 73 & 52 & 23 \\ 82 & 89 & 68 & 62 & 98 & 49 & 29 & 79 & 67 & 13 \\ 59 & 96 & 77 & 98 & 50 & 82 & 80 & 40 & 24 & 46 \\ 57 & 57 & 68 & 49 & 82 & 36 & 25 & 68 & 49 & 16 \\ 54 & 50 & 46 & 29 & 80 & 25 & 10 & 73 & 60 & 5 \\ 40 & 65 & 73 & 79 & 40 & 68 & 73 & 32 & 14 & 48 \\ 26 & 48 & 52 & 67 & 24 & 49 & 60 & 14 & 6 & 39 \\ 31 & 30 & 23 & 13 & 46 & 16 & 5 & 48 & 39 & 2 \end{pmatrix}$$

4. On a complété ci-contre le graphe décrivant les itinéraires avec les temps de parcours en minutes pour chacun des sentiers.
   Déterminer l'itinéraire allant de D à A le plus court en temps.
   On fera apparaître la démarche en utilisant un algorithme.



retour au tableau

49. Amérique du Sud mai 2013

Léa est inscrite sur les réseaux sociaux et consulte régulièrement sa page.

On considère que :

- Si Léa s'est connectée un certain jour, la probabilité qu'elle se connecte le lendemain est égale à $0,9$.
- Si Léa ne s'est pas connectée un certain jour, la probabilité qu'elle se connecte le lendemain est égale à $0,8$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note a_n la probabilité que Léa se connecte le n-ième jour et b_n la probabilité qu'elle ne se connecte pas le n-ième jour.
On a donc : $a_n + b_n = 1$.

Le 1er jour, Léa ne s'est pas connectée, on a donc $a_1 = 0$.

1. (a) Traduire les données par un graphe probabiliste.
   (b) Préciser la matrice M de transition associée à ce graphe.
   (c) Déterminer la probabilité que Léa se connecte le troisième jour.
2. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $a_{n+1} = 0,1a_n + 0,8$.
3. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier $n \geqslant 1$, par $u_n n = a_n - \dfrac{8}{9}$.
   (a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique, préciser sa raison et son premier terme.
   (b) Exprimer u_n puis a_n en fonction de n.
4. (a) Déterminer en justifiant la limite de (a_n).
   (b) Interpréter ce résultat.

retour au tableau

50. Polynésie sept 2012

Le centre commercial Commerce Plus est implanté dans une ville. La première semaine, 80 % des habitants de la ville viennent faire leurs achats dans ce centre commercial, puis on constate dans les semaines suivantes que :

- la probabilité qu'un habitant étant venu faire des achats dans le centre commercial y retourne la semaine suivante est égale à $0,55$;
- la probabilité qu'un habitant n'étant pas venu faire des achats dans le centre commercial y aille la semaine suivante est égale à $0,6$.

On cherche à étudier l'évolution de la répartition des visites des habitants dans le centre commercial sur plusieurs semaines.

1. On note A l'état : « l'habitant vient faire ses courses au centre commercial ».
   On note B l'état : « l'habitant ne vient pas faire ses courses au centre commercial ».
   (a) Représenter la situation ci-dessus par un graphe probabiliste.
   (b) On note M la matrice de transition de ce graphe.
   Vérifier que $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,45 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$.
2. On appelle $P_n = (a_n \quad b_n)$ la matrice traduisant la répartition des habitants selon leur venue au centre commercial au cours de la n-ième semaine :
   - a_n représente la proportion d'habitants qui vient faire ses courses au centre commercial au cours de la n-ième semaine,
   - b_n représente la proportion d'habitants qui ne vient pas faire ses courses au centre commercial au cours de la n-ième semaine.

   Ainsi, on a $P_1 = (0,8 \quad 0,2)$.
   (a) Calculer P_2 et P_3.
   (b) Donner une interprétation de P_3 en termes de répartition des habitants.
3. Soit $P = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ la matrice ligne de l'état probabiliste stable.
   (a) Déterminer x et y. On donnera les valeurs exactes, puis les résultats arrondis au centième.
   (b) Interpréter ces résultats.

retour au tableau

51. Nouvelle Calédonie nov 2012

Afin d'être performant lors d'une grande compétition, Christophe, champion d'athlétisme spécialiste du sprint, s'entraine chaque jour de l'année et réalise quotidiennement une course à pleine vitesse sur 100 mètres en tentant de courir en moins de 10 secondes.
On constate que :

- S'il réalise moins de 10 secondes sur 100 mètres un jour, la probabilité qu'il réalise moins de 10 secondes sur 100 mètres le lendemain est égale à $0,75$.
- S'il ne réalise pas moins de 10 secondes sur 100 mètres un jour, la probabilité qu'il réalise moins de 10 secondes sur 100 mètres le lendemain est égale à $0,5$.

Le premier jour de l'année, Christophe n'a pas réussi à réaliser moins de 10 secondes sur sa course à pleine vitesse.
Soit n un entier naturel non nul. On note :

- a_n, la probabilité que Christophe réalise moins de 10 secondes le n-ième jour.
- b_n, la probabilité que Christophe ne réalise pas moins de 10 secondes le n-ième jour.
- $P_n = (a_n \quad b_n)$, la matrice ligne traduisant l'état probabiliste le n-ième jour.

1. Écrire la matrice ligne P_1 de l'état probabiliste initial.
2. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B (A représentant l'état « Christophe réalise moins de 10 secondes au 100 mètres », B représentant l'état « Christophe ne réalise pas moins de 10 secondes au 100 mètres »).
3. Écrire la matrice de transition M de ce graphe en considérant les états dans l'ordre alphabétique.
4. Déterminer la matrice ligne P_3. Comment peut-on interpréter ce résultat pour Christophe ?
5. Soit $P = (a \quad b)$ la matrice ligne traduisant l'état probabiliste stable.
   (a) Justifier que a et b vérifient le système $\left\{\begin{array}{lll} 0,25a - 0,5b & = & 0 \\ a + b & = & 1 \end{array}\right.$.
   (b) Lors d'une interview à un journaliste sportif, Christophe déclare : « Au vu de tous les entrainements effectués pour me préparer à ce grand évènement je suis confiant et je pense avoir deux chances sur trois de pouvoir réaliser moins de 10 secondes sur 100 mètres lors de la compétition ».
   Cette affirmation vous paraît-elle justifiée ?

retour au tableau

52. Amerique du Sud nov 2012

Un employé se rend à son travail en bus et, soit il n'est pas en retard, c'est-à-dire qu'il est à l'heure ou en avance, soit il est en retard.
Le 1er jour, la probabilité que cet employé arrive en retard est de $0,2$.

Pour les jours suivants :

S'il est en retard un jour donné, alors la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est de $0,05$.
Si l'employé n'est pas en retard un jour donné, alors la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est de $0,2$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note

R_n l'évènement « l'employé est en retard à son travail le n-ième jour ».

H_n l'évènement « l'employé n'est pas en retard à son travail le n-ième jour ».

On note également, pour tout entier naturel n non nul :

- r_n la probabilité que l'employé soit en retard le n-ième jour,
- h_n la probabilité que l'employé ne soit pas en retard le n-ième jour,
- $P_n = (r_n \quad h_n)$ la matrice qui traduit l'état probabiliste au n-ième jour.

1. Déterminer l'état initial P_1.
2. (a) Tracer un graphe probabiliste traduisant les données de l'énoncé.
   (b) Donner la matrice de transition M associée à ce graphe.
3. Quelle est la probabilité que cet employé soit en retard le 3e jour. On donnera le résultat avec une valeur arrondie au centième.
4. Soit $P = (x \quad y)$ l'état probabiliste stable.
   (a) Montrer que x et y vérifient la relation $y = 0,95x + 0,8y$.
   (b) Déterminer l'état stable du système en arrondissant les valeurs au millième. Interpréter ces résultats.

retour au tableau

53. Antilles sept 2012

Les employés d'une grande zone commerciale ont le choix entre deux types de restaurants : un « self » ou un restaurant « traditionnel » avec service à la place. On admet que tous les employés mangent chaque jour dans l'un des deux restaurants.
On a constaté que :

- si un employé mange au « self » un jour donné, alors le lendemain il y mange également avec une probabilité de 0,8 ;
- si un employé mange dans le restaurant « traditionnel » un jour donné, alors le lendemain il change pour le « self » avec une probabilité de 0,4.

On choisit au hasard un employé de la zone commerciale.
Si n est un entier naturel non nul, on appelle s_n la probabilité que l'employé choisi mange au « self »le n-ième jour, et par $t_n = 1 - s_n$ la probabilité qu'il mange au restaurant « traditionnel » le n-ième jour.
Pour l'état initial, on admet que $s_1 = t_1 = 0,5$, c'est-à-dire que le premier jour, les probabilités de choix du « self » ou du restaurant « traditionnel » sont égales.
Dans la suite, pour tout entier naturel n non nul, on note P_n la matrice $P_n = (sn \quad t_n)$.

1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste.
2. Justifier l'égalité matricielle $P_{n+1} = P_n \times M$ où M désigne la matrice $\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$ et n un entier naturel non nul.
3. Déterminer la probabilité que l'employé tiré au sort mange au « self » le deuxième jour.
4. Déterminer l'état probabiliste stable et l'interpréter.
5. Démontrer que pour tout entier nature n non nul, on a : $s_{n+1} = \dfrac{2}{5}s_n + \dfrac{2}{5}$.
6. Dans la suite, pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = s_n - \dfrac{2}{3}$.
   (a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$ et de premier terme $u_1 = -\dfrac{1}{6}$.
   (b) Déterminer l'expression de u_n en fonction de n, où n est un entier naturel non nul.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $s_n = -\dfrac{1}{6} \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1} + \dfrac{2}{3}$.
   (d) Déterminer la limite de la suite (s_n) quand n tend vers $+\infty$ et interpréter ce résultat.

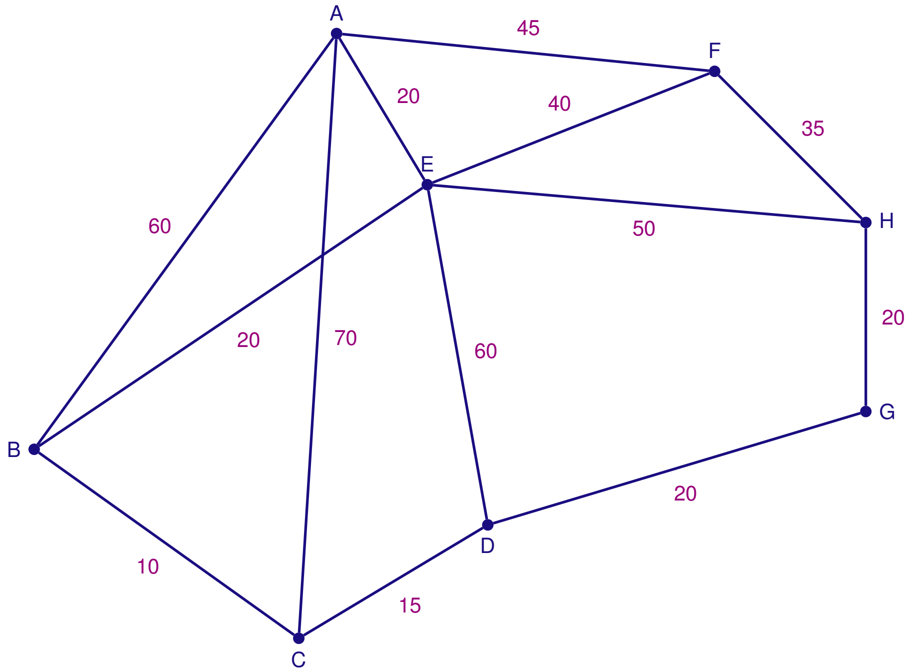
retour au tableau

54. Polynesie juin 2012

Jonathan est un sportif adepte du semi-marathon (course à pied de 21,1 km). Depuis le 1er janvier 2012, il a décidé de courir un semi-marathon par mois. Afin d'améliorer sa préparation, il décide d'enchaîner les courses pédestres de 10 km dans différentes villes.

PARTIE A

Le graphe pondéré ci-dessous représente les villes A, B, C, D, E, F, H organisant des courses de 10 km et la ville G est celle organisant le prochain semi-marathon auquel Jonathan est inscrit.
Le poids de chaque arête représente le temps, en minutes, nécessaire pour relier une ville à une autre grâce aux transports en commun.



Jonathan vient de courir dans la ville A et souhaite se rendre dans la ville G pour repérer le parcours de son prochain semi-marathon. Déterminer à l'aide d'un algorithme le chemin permettant de relier le plus rapidement la ville A à la ville G et donner la durée de ce parcours en minutes.

PARTIE B

Grâce à son entraînement et à son expérience, Jonathan sait que :

— S'il a terminé la course lors de son précédent semi-marathon, il terminera le prochain semi-marathon avec une probabilité de 0,62 ;

— S'il a abandonné lors de son précédent semi-marathon, il terminera le prochain semi-marathon avec une probabilité de 0,8.

Jonathan a terminé son semi-marathon de janvier 2012. Pour tout entier naturel n, on note P_n la matrice ligne $\begin{pmatrix} r_n & t_n \end{pmatrix}$ traduisant l'état probabiliste du n-ième mois écoulé depuis janvier 2012, où r_n désigne la probabilité que Jonathan abandonne au semi-marathon du n-ième mois et t_n la probabilité que Jonathan termine le semi-marathon du n-ième mois.
L'état probabiliste initial, correspondant à janvier 2012, est donc donné par : $P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Traduire les données par un graphe probabiliste dont les sommets sont notés R et T (R lorsque Jonathan abandonne, T lorsqu'il termine le semi-marathon).
2. En déduire la matrice de transition en considérant les sommets dans l'ordre alphabétique.
3. Calculer l'état probabiliste P_2 . En déduire la probabilité que Jonathan ait abandonné lors du semi-marathon couru en mars 2012.
4. Soit P la matrice ligne $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ donnant l'état stable.
   (a) Calculer les valeurs de x et de y arrondies à 10^{-3} près.
   (b) Interpréter les résultats obtenus.

retour au tableau

55. Métropole juin 2012

Une région se divise en deux zones :
une zone A à proximité d'une grande agglomération,
une zone B à proximité de la mer.
Chaque année, 20 % des habitants de la zone A partent habiter dans la zone B pour avoir un meilleur cadre de vie, et 5 % des habitants de la zone B partent habiter dans la zone A pour se rapprocher de leur lieu de travail.
On sait de plus qu'en 2010, 40 % de la population habitait en zone A.
On suppose que le nombre total d'habitants de la région reste constant au cours du temps.
Pour tout entier naturel n, l'état probabiliste correspondant à l'année $2010 + n$ est défini par la matrice ligne $P_n = (a_n \quad b_n)$, où a_n et b_n désignent respectivement les proportions d'habitants des zones A et B.

1. Déterminer la matrice ligne P_0 de l'état initial.
2. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.
3. (a) Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.
   (b) Donner la répartition de la population en 2012.
4. Dans la question suivante, on considère la matrice ligne $P = (a \quad b)$ où a et b sont deux nombres réels tels que $a + b = 1$.
   (a) Déterminer a et b pour que $P = PM$.
   (b) Les infrastructures de la zone B permettent d'accueillir au maximum 75 % de la population. Lors d'un conseil municipal, le maire affirme qu'il va falloir prévoir de nouvelles infrastructures. A-t-il raison ?

retour au tableau

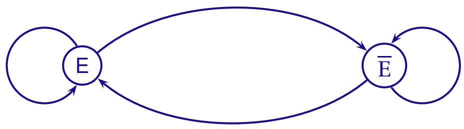
56. Liban mai 2012

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.
Cet exercice consiste à étudier la propagation d'une information d'une personne à l'autre, thème souvent abordé en sciences sociales. Cette information se transmet avec un risque d'erreur, c'est-à-dire avec une probabilité de propagation de l'information contraire.
Dans cet exercice, on considère l'information suivante, notée E : « Paul a réussi son examen ».

Partie A : Propagation symétrique (de type « neutre »)

Dans cette partie, on suppose que, pour une information reçue (E ou $\overline{\text{E}}$), la probabilité de communiquer cette information à l'identique vaut 0,9 et la probabilité de relayer l'information contraire vaut 0,1.
On note p_n la probabilité de recevoir l'information E au bout de n étapes (n étant le nombre de personnes ayant transmis l'information) et on note q_n la probabilité de recevoir l'information $\overline{\text{E}}$ au bout de n étapes.
On suppose que Paul a réussi son examen, on pose $p_0 = 1$ et $q_0 = 0$.

1. Recopier puis compléter le graphe probabiliste relatif à la propagation de l'information suivant :



2. Préciser la matrice de transition M telle que $\begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix}$M.
3. À l'aide de la calculatrice, trouver le plus petit entier naturel n tel que $p_n < 0,8$.
4. Déterminer par le calcul, l'état stable.

Partie B : Propagation asymétrique (de type « rumeur »)

Dans cette partie, on suppose toujours que la probabilité de transmission correcte de l'information E est égale à 0,9. Toutefois, il circule la fausse rumeur $\overline{\text{E}}$. Dans ces conditions, on suppose que si l'information reçue est $\overline{\text{E}}$, la probabilité de transmettre cette information $\overline{\text{E}}$ est égale à 1.
On suppose de nouveau que $p_0 = 1$ et $q_0 = 0$.

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste.
2. Préciser la matrice de transition N telle que $\begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix}$N.
3. Montrer que $p_{n+1} = 0,9p_n$. Quelle est la nature de la suite (p_n) ?
4. Exprimer p_n en fonction de n.
5. Trouver par le calcul, le plus petit entier naturel n tel que $p_n < 0,5$.
6. Déterminer la limite de (p_n) lorsque n tend vers $+\infty$ puis interpréter le résultat obtenu.

retour au tableau

57. Etranger juin 2012

Au rugby, réussir une transformation consiste à faire passer le ballon entre deux poteaux verticaux et au dessus de la barre horizontale reliant ces deux poteaux.
Basile est un joueur de rugby, il envisage de devenir professionnel.
Ses différentes expériences en championnat conduisent aux résultats suivants :

— Lors d'un match, la probabilité que Basile réussisse la première transformation est égale à 0,5.

— Si Basile réussit une transformation, la probabilité qu'il réussisse la transformation suivante est égale à 0,8.

— Si Basile ne réussit pas une transformation, la probabilité qu'il réussisse la transformation suivante est égale à 0,6.

Basile se prépare pour son match de sélection en tant que professionnel.
On considère que lors du match, n transformations sont tentées avec n entier naturel supérieur ou égal à 1.
On note T l'état : « Basile réussit sa transformation ».
Pour $n \geqslant 1$, on note :

— p_n la probabilité que Basile réussisse la n-ième transformation.

— q_n la probabilité que Basile ne réussisse pas la n-ième transformation.

— $P_n = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste lors de la n-ième transformation.

On a $P_1 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$.

PARTIE A

1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste de sommets T et $\overline{\text{T}}$.
2. Donner la matrice de transition M de ce graphe probabiliste.
3. Déterminer l'état probabiliste P_2.

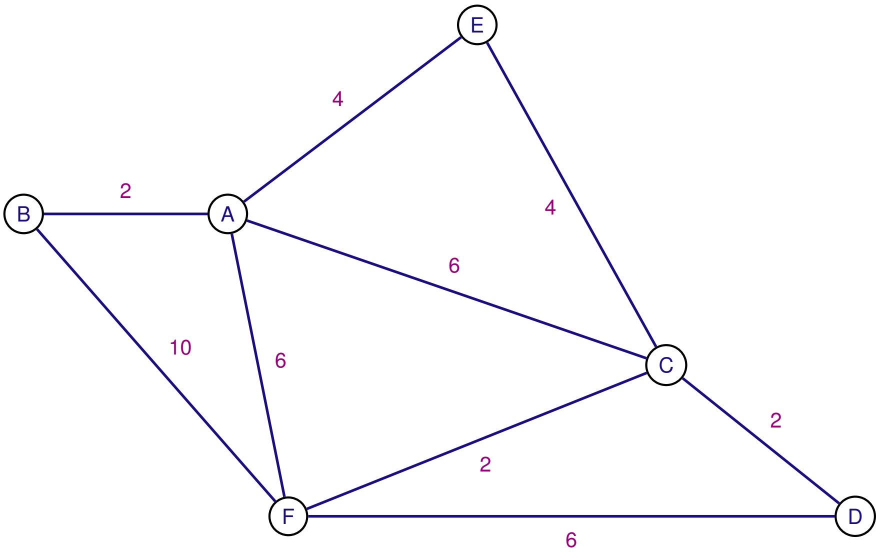
PARTIE B

1. (a) En utilisant l'égalité $P_{n+1} = P_n\text{M}$, montrer que $p_{n+1} = 0,8p_n + 0,6q_n$.
   (b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,6$.
2. Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \geqslant 1$ par $u_n = p_n - 0,75$.
   (a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,2.
   (b) En déduire que la suite (p_n) converge et donner sa limite.
   (c) Interpréter le résultat précédent.

retour au tableau

58. Asie juin 2012

Une association organise un rallye sportif en VTT : six zones de regroupement sont déterminées et sont reliées par des chemins.
Ce parcours est modélisé par le graphe ci-dessous, où les sommets de A à F représentent les zones de regroupement, et les arêtes les chemins.
Les arêtes sont pondérées par les distances, exprimées en kilomètres, nécessaires pour parcourir ces chemins.
Les candidats sont positionnés initialement sur la zone A et doivent, après avoir parcouru tous les chemins, revenir à la zone initiale.
Chaque fois qu'un candidat emprunte pour la première fois un chemin il doit déposer, à un endroit précis, un jeton personnalisé, attestant son passage.



1. Quel nombre minimal de jetons est-il nécessaire de donner à chaque candidat ?
2. Un candidat souhaite faire le parcours, en empruntant tous les chemins une fois et une seule. Est-ce possible ? Justifier la réponse.
3. Soit M la matrice associée au graphe G (on ordonne les sommets dans l'ordre alphabétique).

   (a) Écrire la matrice M.

   (b) On donne les matrices $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $M^3 = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 9 & 4 & 6 & 9 \\ 6 & 2 & 4 & 3 & 3 & 6 \\ 9 & 4 & 6 & 6 & 6 & 9 \\ 4 & 3 & 6 & 2 & 3 & 6 \\ 6 & 3 & 6 & 3 & 2 & 4 \\ 9 & 6 & 9 & 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

   Un candidat est actuellement au point de rendez-vous D et on lui signale qu'il a oublié son dossard au point B. Devant le récupérer, il souhaite emprunter au maximum trois chemins. Combien a-t-il de possibilités ?

   (c) Donner le trajet correspondant à la distance la plus courte lui permettant d'aller récupérer son dossard. Justifier votre réponse en utilisant un algorithme.

retour au tableau

59. Antilles juin 2012

Dans une grande entreprise, tous les agents commerciaux ont une voiture de fonction, qu'ils doivent choisir entre deux marques A et B. Le parc de véhicules (en location) est renouvelé tous les ans.
On suppose que le nombre d'agents commerciaux de l'entreprise ne varie pas, et que les deux marques A et B restent les seules possibilités pour les voitures de fonction proposées dans l'entreprise.
On a constaté que, chaque année :

— 5 % des agents commerciaux utilisant un véhicule de marque A changent l'année suivante pour B ;

— 15 % des agents commerciaux utilisant un véhicule de marque B changent l'année suivantes pour A ;

— les autres agents poursuivent l'année suivante avec un véhicule de même marque.

On appelle a_n la probabilité qu'un agent commercial choisi au hasard utilise un véhicule de marque A au début de l'année $2010+n$, et b_n la probabilité qu'il utilise un véhicule de marque B au début de cette même année.
On note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice correspondant à l'état probabiliste de l'année $2010+n$.
En 2010, la moitié des agents commerciaux possédaient un véhicule de marque A ; ainsi : $P_0 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B, et donner la matrice de transition M (on considèrera les sommets du graphe dans l'ordre alphabétique).
2. Justifier que $P_1 = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,45 \end{pmatrix}$ et donner une interprétation concrète des coefficients de cette matrice.
3. Déterminer l'état probabiliste stable du système et interpréter les résultats obtenus.
4. (a) Que vaut, pour tout entier naturel n, la somme $a_n + b_n$?
   (b) On sait, pour tout entier naturel n, que $P_{n+1} = P_n \times M$; démontrer, pour tout entier naturel n, que $a_{n+1} = 0,8a_n + 0,15$.
5. Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = a_n - 0,75$.
   (a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométriques de raison 0,8 dont on précisera le premier terme.
   (b) Exprimer u_n en fonction de n, puis démontrer que pour tout entier naturel n,
   $$a_n = -0,25 \times 0,8^n + 0,75.$$
   (c) Déterminer la limite de la suite (a_n). Quel résultat retrouve-t-on ainsi ?

retour au tableau

60. Amerique Nord mai 2012

Un club de sport propose à ses adhérents deux types d'abonnements : l'abonnement de type A qui donne accès à toutes les installations sportives et l'abonnement de trype B qui, en plus de toutes les installations sportives, donne accès au sauna, au hammam et au jacuzzi. Chaque adhérent doit choisir un des deux abonnements.

La première année, en 2010, 80% des clients ont choisi l'abonnement de type A. On considère ensuite que 30% des adhérents ayant un abonnement de type A changent d'abonnement pour l'année suivante, tandis que 10% des adhérents ayant un abonnement de type B changent d'abonnement pour l'année suivante.

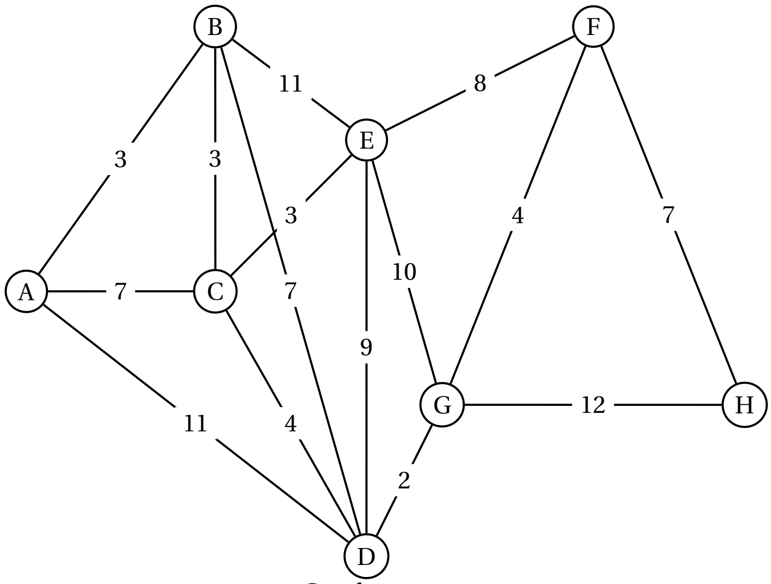
Soit n un entier supérieur ou égal à 0.
On note a_n la proportion des adhérents ayant un abonnement de type A l'année $2010+n$.
On note b_n la proportion des adhérents ayant un abonnement de type B l'année $2010+n$.
Enfin on note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice traduisant l'état probabiliste de l'année $2010+n$.

1. Déterminer P_0.
2. Représenter cette situation par un graphe probabiliste.
3. Écrire la matrice de transition M asociée à cette situation.
4. Déterminer la matrice P_2. En déduire la probabilité pour qu'en 2012 un adhérent choisisse l'abonnement de type A.
5. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 0, $a_{n+1} = 0,6a_n + 0,1$.
6. Pour tout entier n supérieur ou égal à 0, on pose $u_n = 4a_n - 1$.
   Montrer que la suite (u_n) est géométrique de raison 0,6. Préciser son premier terme.
7. Pour tout entier n supérieur ou égal à 0, exprimer u_n en fonction de n. En déduire a_n en fonction de n.
8. Calculer la limite de la suite (a_n) puis interpréter concrètement ce résultat.

retour au tableau

61. Pondichery avril2012

Les points de collecte d'un camion d'une société recyclant des « déchets papier », ainsi que les temps de trajet (en minutes) entre ces différents points, sont représentés par le graphe n° 1. Le dépôt est représenté par le sommet A et les autres sommets représentent les différents points de collecte.

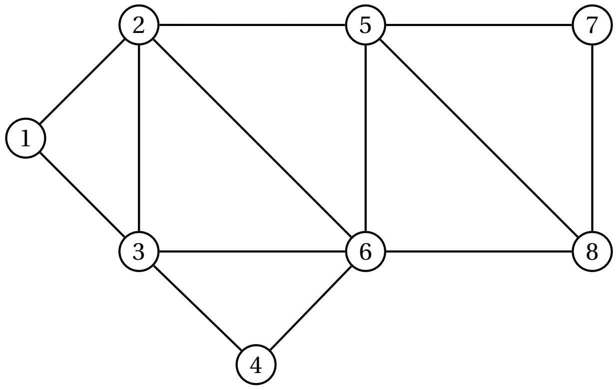


Graphe n° 1

1. Afin de rendre son plan plus lisible, le chauffeur du camion souhaite colorer les sommets du graphe représentant son réseau de manière à ce que deux sommets adjacents n'aient jamais la même couleur. Peut-il utiliser seulement trois couleurs ? Justifier.
2. On appelle M la matrice associée au graphe n° 1, M étant construite en utilisant les sommets dans l'ordre alphabétique. On donne ci-dessous la matrice M^4 :

$$M^4 = \begin{pmatrix} 31 & 34 & 34 & 38 & 40 & 13 & 23 & 9 \\ 34 & 47 & 46 & 50 & 44 & 22 & 33 & 10 \\ 34 & 46 & 47 & 50 & 44 & 22 & 33 & 10 \\ 38 & 50 & 50 & 62 & 54 & 28 & 34 & 16 \\ 40 & 44 & 44 & 54 & 60 & 24 & 36 & 20 \\ 13 & 22 & 22 & 28 & 24 & 21 & 23 & 11 \\ 23 & 33 & 33 & 34 & 36 & 23 & 35 & 13 \\ 9 & 10 & 10 & 16 & 20 & 11 & 13 & 11 \end{pmatrix}$$

   Combien y a-t-il de trajets possibles permettant d'aller du dépôt A au point de collecte H en quatre étapes ? Justifier la réponse.
3. Le conducteur doit se rendre du dépôt A au point de collecte H. Il cherche le chemin qui minimise le temps de trajet. Déterminer ce chemin en expliquant le procédé utilisé, et préciser le temps minimum de parcours obtenu.
4. Le point de collecte H est lui-même un lotissement résidentiel privé dont un plan est représenté à l'aide du graphe (non pondéré) ci-dessous. Les sommets sont les différents carrefours et les arêtes sont les voies de circulation.



(a) Justifier que ce graphe est connexe.

(b) Le conducteur du camion doit passer le long de chaque voie afin de collecter les déchets individuels de chaque habitation. Il entre dans le lotissement par le sommet 8 : lui est-il possible de parcourir le lotissement en empruntant chaque voie une fois et une seule ? Justifier.

retour au tableau

62. Nouvelle Caledonie nov2011

Joanne est éducatrice canin : elle donne des leçons d'éducation le samedi après-midi.
Neuf chiots sont présents : Allegro, Bronx, Chouchou, Delco, Euclide, Falbala, Galipette, Homère et Indigo.
Joanne souhaite réaliser des exercices d'apprentissage par petits groupes de deux ou trois chiens. Falbala ne pense qu'à jouer si elle est trop proche de Bronx, Chouchou ou Euclide.
De même, Delco est très inattentif si Bronx ou Falbala sont à proximité !
Indigo ne supporte pas le caractère trop fougueux de Galipette.
Enfin le turbulent Allegro ne supporte la présence d'aucun autre chiot, sauf Euclide et Homère.

1. Représenter cette situation à l'aide d'un graphe G dont les sommets sont les noms des chiots et relier entre eux les chiots que l'on ne peut pas mettre ensemble pour ce travail de groupe.
2. Le graphe G est-il connexe ? Expliquer.
3. Déterminer un sous graphe complet d'ordre maximal du graphe G.
   Que peut-on en déduire pour le nombre chromatique du graphe G ?
4. Donner la valeur du nombre chromatique du graphe G.
5. Peut-on proposer une répartition des chiots en groupes de deux à trois chiots pouvant travailler ensemble ?

retour au tableau

63. Amerique Sud nov2011

Franck Geek est adepte de jeux vidéo en ligne. Afin de préserver son temps de travail scolaire, il essaye de se modérer. Il constate que :

- s'il a joué un jour, la probabilité qu'il ne le fasse pas le lendemain est de $0,6$;
- s'il n'a pas joué un jour, la probabilité qu'il joue le lendemain est de $0,9$.

Le jour de la rentrée (premier jour), Franck a décidé de ne pas jouer.

1. (a) Quelle est la probabilité que Franck joue le deuxième jour ?
   (b) Quelle est la probabilité qu'il ne joue pas le deuxième jour ?
2. On note D l'évènement : « Franck a joué » et E l'évènement : « Franck a su résister ».
   (a) Modéliser cette situation par un graphe probabiliste.
   (b) Donner la matrice de transition M associée à ce graphe.
3. Soit n un entier naturel non nul. Soient D_n l'évènement : « Franck a joué le n-ième jour » et E_n l'évènement : « Franck a su résister le n-ième jour ».
   L'état probabiliste lors du n-ième jour est alors donné par la matrice ligne $P_n = (d_n \quad e_n)$ où d_n désigne la probabilité de l'évènement D_n et e_n celle de l'évènement E_n.
   On a ainsi $P_1 = (0 \quad 1)$.
   (a) Déterminer P_2.
   (b) Donner la relation liant P_{n+1} et P_n.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $d_{n+1} = -0,5d_n + 0,9$.
4. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = d_n - 0,6$.
   (a) Démontrer que la suite u est une suite géométrique.
   Préciser sa raison et la valeur de son premier terme.
   (b) Exprimer alors u_n puis d_n en fonction de n.
   (c) Calculer $\lim_{n\to+\infty} d_n$ et interpréter ce résultat.

retour au tableau

64. Polynésie sept 2011

Deux enfants Alexis et Bilal jouent dans la cour de leur immeuble.
Ils décident d'entamer une compétition formée d'une série de parties (notées partie 1, partie 2, ...).
On désigne par n un entier supérieur ou égal à 1. On suppose que :

- Alexis a 65 % de chances de gagner la partie 1 ;
- si Alexis gagne la partie n, alors il a 10 % de chances de gagner la partie $n+1$;
- si Alexis perd la partie n, alors il a 60 % de chances de gagner la partie $n+1$.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on note :

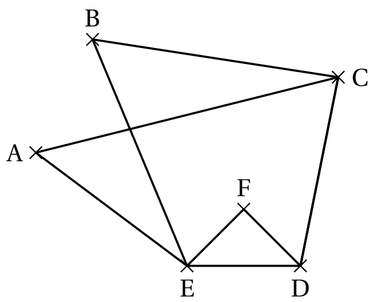
- A_n l'évènement : « Alexis gagne la partie n » ;
- B_n l'évènement : « Bilal gagne la partie n »(on remarquera que : $B_n = \overline{A_n}$) ;
- a_n la probabilité de l'évènement A_n et b_n celle de l'évènement B_n.

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre

PARTIE A : Étude d'un graphe probabiliste
Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on note $P_n = (a_n \quad b_n)$ la matrice ligne représentant l'état probabiliste lors de la partie n.

1. (a) Donner sans justification la matrice P_1.
   (b) Traduire la situation à l'aide d'un graphe probabiliste.
2. On admet que la matrice de transition M associée au graphe probabiliste précédent est $M = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$
   (a) Donner M^2 (on pourra utiliser la calculatrice ; les coefficients de M^2 seront donnés sous forme décimale exacte).
   (b) En déduire la probabilité que Bilal gagne la partie 3, en justifiant la réponse (le résultat sera donné sous forme décimale arrondie à 10^{-2}).
3. Soit $P = (x \quad y)$ la matrice correspondant à l'état stable (x et y sont des nombres réels tels que $x + y = 1$).
   (a) Déterminer les nombres x et y.
   (b) Interpréter ces deux valeurs.

PARTIE B : Détermination d'un nombre chromatique
Carlos (C), Dora (D), Edwige (E) et Farid (F), eux aussi intéressés par le jeu, décident de rejoindre Alexis (A) et Bilal (B) et de former ainsi des équipes.
Comme ils ne s'entendent pas tous entre eux, ils optent pour une répartition en équipe par affinité.
On donne ci-après le graphe G d'incompatibilité entre les différents enfants :



Par exemple, Alexis ne peut pas se trouver dans une équipe où il y aurait Carlos ou Edwige.
Cela est représenté dans le graphe par le fait que les sommets A et C, ainsi que les sommets A et E sont adjacents.

1. Déterminer un sous-graphe complet d'ordre 3. Que peut-on en déduire pour le nombre chromatique du graphe G ?
2. Donner en justifiant un encadrement du nombre chromatique du graphe G.
3. Proposer une coloration du graphe (sans justification) puis en déduire le nombre chromatique du graphe G.
4. Proposer une répartition des enfants faisant intervenir un nombre minimal d'équipes.

retour au tableau

65. Liban mai 2011

En 2010, les clients d'une banque nationale se répartissent en deux catégories distinctes :

- Catégorie A, composée des clients d'agence
- Catégorie I, composée des clients internet

En 2010, 92 % des clients sont des clients d'agence et 8 % des clients sont des clients internet.
On admet que chaque année, 5 % des clients d'agence deviennent clients internet et inversement 1 % des clients internet deviennent clients d'agence.
On suppose que le nombre de clients de la banque reste constant au cours du temps et qu'un client ne peut faire partie des deux catégories.
On s'intéresse à l'évolution de la répartition des clients de cette banque dans les années à venir.
On note pour tout entier naturel n :

- a_n la probabilité qu'un client de la banque, pris au hasard, soit un client d'agence à l'année $2010+n$,
- i_n la probabilité qu'un client de la banque, pris au hasard, soit un client internet à l'année $2010+n$,
- $P_n = (a_n \quad i_n)$ la matrice correspondant à l'état probabiliste de l'année $2010+n$.

On note M la matrice de transition, telle que pour tout entier naturel n,
$P_{n+1} = P_n \times M$.
Partie A État stable d'un graphe probabiliste
Dans cette partie, on donnera des valeurs approchées arrondies au centième.

1. Déterminer le graphe probabiliste correspondant à cette situation.
2. Donner P_0 la matrice traduisant l'état probabiliste initial.
   On admettra que $M = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,01 & 0,99 \end{pmatrix}$.
3. (a) Calculer la matrice P_1.
   (b) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, la répartition des clients de la banque en 2015.
4. Déterminer, par le calcul, l'état stable de la répartition des clients.
   Interpréter le résultat.

Partie B Étude de la limite d'une suite récurrente

1. (a) À l'aide de la relation $P_{n+1} = P_n \times M$, exprimer a_{n+1} en fonction de a_n et i_n.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,94a_n + 0,01$.
2. On définit la suite (u_n) par $u_n = a_n - \dfrac{1}{6}$ pour tout entier naturel n.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est une suite, géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   (b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   (c) En déduire que pour tout entier naturel n, $a_n = \dfrac{113}{150} \times 0,94^n + \dfrac{1}{6}$.
   (d) Déterminer la limite de la suite a_n lorsque n tend vers $+\infty$. Interpréter le résultat.

retour au tableau

66. Métropole juin 2011

Chaque année, une association de cyclotourisme prépare de nouveaux circuits. Pour satisfaire ses nombreux membres, elle élabore des circuits de différents niveaux : « niveau facile », « niveau moyen » et « niveau difficile ».
Au premier janvier 2010, l'association a fait son bilan :

- 20 % de ses adhérents ont choisi le niveau facile, noté A
- 70 % de ses adhérents ont choisi le niveau moyen, noté B
- 10 % de ses adhérents ont choisi le niveau difficile, noté C

Pour répondre aux attentes des adhérents et les fidéliser sur le long terme, une enquête est effectuée.
Il s'avère que, d'une année à l'autre :

- parmi les adhérents ayant choisi le niveau A, 40 % restent à ce niveau et 60 % passent au niveau B,
- parmi les adhérents ayant choisi le niveau B, 70 % restent à ce niveau et 20 % reviennent au niveau A et les autres passent passent au niveau C,
- parmi les adhérents ayant choisi le niveau C, 85 % restent à ce niveau et les autres reviennent au niveau B.

On note :

- A l'état « l'adhérent a choisi le niveau A »,
- B l'état « l'adhérent a choisi le niveau B »,
- C l'état « l'adhérent a choisi le niveau C ».

Pour n entier naturel positif ou nul, on note $P_n = (a_n \quad b_n \quad c_n)$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste de la répartition dans les différents niveaux (indiqués dans l'ordre donné dans l'énoncé), au premier janvier de l'année $2010 + n$. Ainsi $P_0 = (0,2 \quad 0,7 \quad 0,1)$.
On se décide se baser uniquement sur ces résultats pour prévoir l'évolution de la répartition à partir du premier janvier 2010 (on néglige donc les nouveaux abonnés et les départs).

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste de sommets A, B et C.
2. Reproduire et compléter la matrice de transition M de ce graphe probabiliste, en respectant l'ordre alphabétique des sommets.

$$M = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & 0 \\ 0,2 & \cdots & \cdots \\ \cdots & 0,15 & \cdots \end{pmatrix}$$

3. Une seule des trois matrices Q, R, T ci-dessous correspond à l'état probabiliste stable.

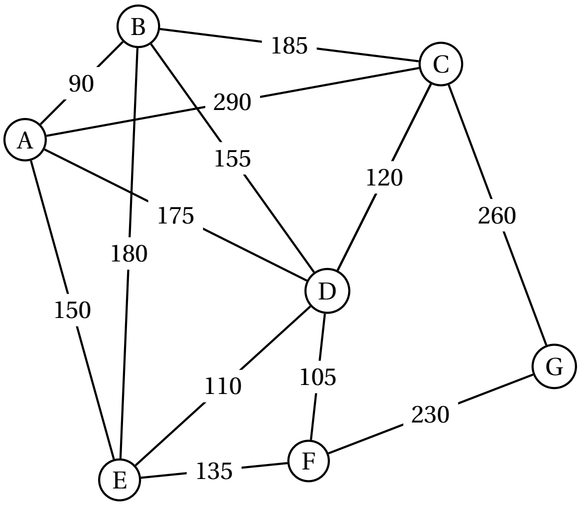
$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

Le président de l'association affirme que 50 % des adhérents choisiront après un certain nombre d'années le niveau B. Cette affirmation est-elle correcte ?

retour au tableau

67. Asie juin 2011

Les parties I et II sont indépendantes
Le graphe Γ suivant représente le plan d'un zoo.
Le sommet A représente son accès. Les sommets B, C, D, E, F et G désignent les différents secteurs animaliers de ce zoo.
Une arête représente l'allée reliant deux secteurs et est pondérée par la distance de parcours, exprimée en mètres, entre ces deux secteurs.
AB = 90, AC = 290, AD = 175, AE = 150, BC = 185, BD = 155, BE = 180, CD = 120, CG =260,
DE = 110, DF = 105, EF = 135, FG = 230.



Partie 1 : Pour mieux visualiser sur le plan les différents secteurs du zoo, on veut les colorier de telle sorte que deux secteurs adjacents ne soient pas de la même couleur.

1. Quel est le nombre minimun de couleurs nécessaires à la réalisation de ce plan ? Justifier la réponse,
2. Donner un encadrement du nombre chromatique du graphe Γ.
   Justifier la réponse.
3. Proposer alors une telle coloration.

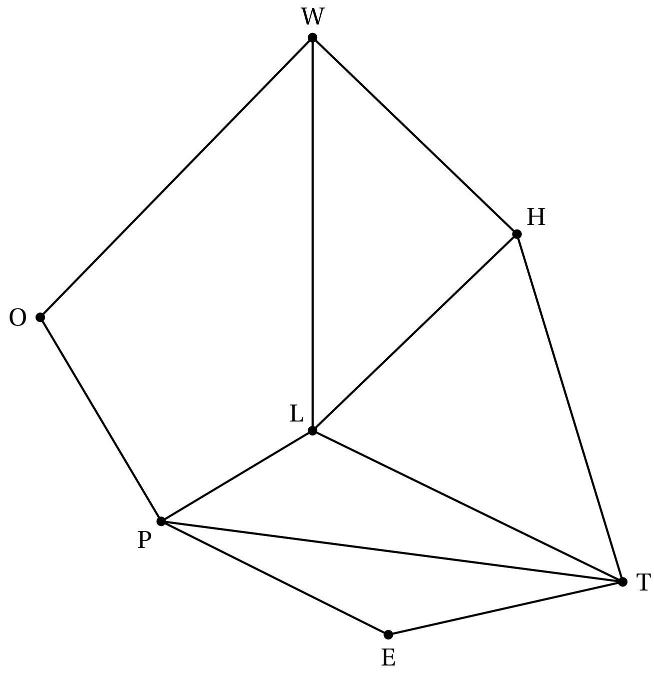
Partie II :

1. Pour nettoyer les allées, les services techniques du zoo utilisent une balayeuse automobile.
   Est-il possible que cette balayeuse n'emprunte chaque allée qu'une fois et une seule ? Si oui, proposer un tel chemin, sinon justifier votre réponse.
2. Les services de sécurité basés au point A doivent intervenir dans le secteur G. Déterminer, à l'aide d'un algorithme, l'itinéraire le plus court.

retour au tableau

68. Polynésie juin 2011

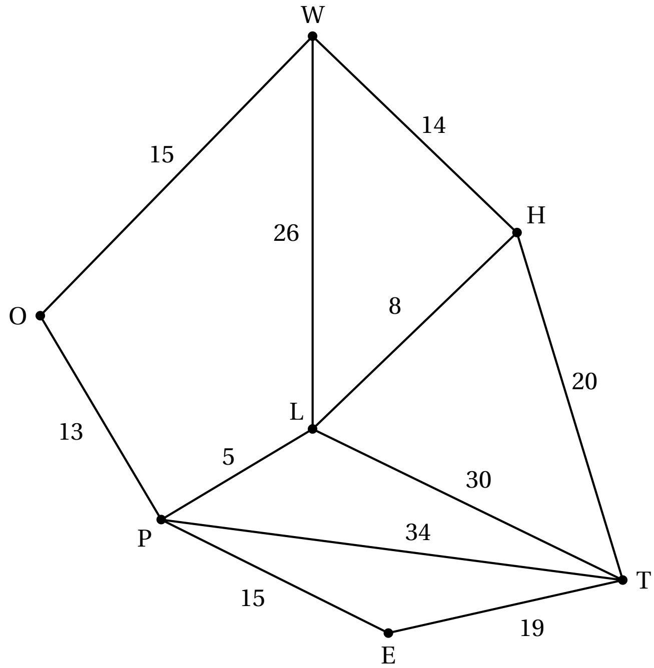
Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre
On considère le graphe Γ ci-dessous :



Partie A : Étude d'un graphe

1. Ce graphe admet-il une chaîne eulérienne ? (La réponse devra être justifiée). Si oui donner une telle chaîne.
2. Ce graphe admet-il un cycle eulérien ? (La réponse devra être justifiée). Si oui donner un tel cycle.
3. Donner la matrice M associée au graphe Γ (les sommets seront pris dans l'ordre alphabétique : E ; H ; L ; O ; P ; T ; W).

Partie B : Voyage scolaire
La classe de Terminale d'Arthur est en voyage scolaire en Angleterre.
Les professeurs organisateurs de ce voyage décident de visiter plusieurs sites de Londres.
Les sites retenus dans Londres sont les suivants : Warren Street, Oxford Circus, Piccadilly Circus, Leicester Square, Holborn, Embankment et Temple. Ces lieux sont désignés respectivement par les lettres W, O, P, L, H, E et T et sont représentés dans le graphe Γ donné ci-dessus (chaque sommet représente un site à visiter et chaque arête une route reliant deux sites).
Les élèves sont laissés en autonomie deux heures pour faire du shopping et ramener des souvenirs à leurs familles. Le point de rendez-vous avec les organisateurs est fixé à Temple. Les temps de parcours en minutes entre chaque sommet ont été ajoutés sur le graphe.



Arthur, qui est à Oxford Circus, n'a pas vu le temps passer. Lorsqu'il s'en rend compte, il ne lui reste plus que 40 minutes pour arriver à Temple.

1. Déterminer le plus court chemin en minutes reliant Oxford Circus à Temple. Justifier la réponse à l'aide d'un algorithme.
2. Quelle est la longueur en minutes de ce chemin ? Arthur sera-t-il en retard ?

retour au tableau

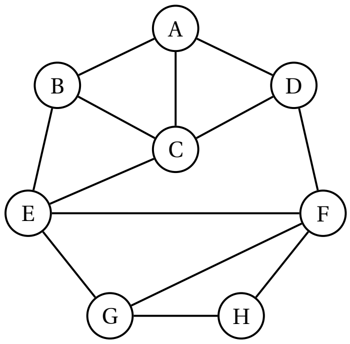
69. Amérique du Nord mai 2011

Partie A Étude d'un site

Un site internet comporte 8 pages, notées A, B, C, D, E, F, G, H reliées entre elles suivant le graphe ci-contre.

Ainsi, par exemple, à partir de la page A on peut directement accéder aux pages B, C et D.

Par contre, la page A ne permet pas d'accéder directement à la page F.



1. Le technicien souhaite tester les liens de pages. En partant de la page A, est-il possible de trouver un parcours passant une seule fois par tous les liens de pages ? Justifier la réponse.
2. Pour marquer les changements de page, l'administrateur du site souhaite que deux pages reliées aient des couleurs différentes.

   On note N le nombre minimum de couleurs nécessaires.

   (a) Donner un sous-graphe complet d'ordre maximal.

   (b) En utilisant la question 2. a. et à l'aide d'un algorithme, montrer, que $N = 3$.

Partie B Étude de propagation d'un virus d'un site à l'autre

Le site précédent, appelé site n° 1, propose un unique lien vers un site partenaire, appelé Site n° 2, sans retour possible. De même, le site n° 2 propose un unique lien vers un site n° 3, sans retour possible et ainsi de suite ... (voir le schéma ci-dessous) :

Site n° 1 $\longrightarrow$ Site n° 2 $\longrightarrow$ Site n° 3 $\longrightarrow$ ... $\longrightarrow$ Site n° n $\longrightarrow$ Site n° $n+1$ ...

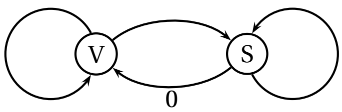
Le site n° 1 vient d'être infecté par un virus informatique qui utilise les liens entre les sites pour essayer de se propager, les autres sites n'étant pas encore touchés.

Face à ce nouveau virus, les antivirus ne sont efficaces qu'à 80 %. On note :

— V l'état « le site est infecté par le virus »

— S l'état « le site est sain (non infecté par le virus) ».

On a dessiné ci-dessous le graphe probabiliste traduisant les risques de propagation du virus d'un site au suivant :



1. Justifier la valeur 0 indiquée sur le graphe probabiliste précédent, puis recopier et compléter ce graphe sur votre copie.
2. Préciser la matrice de transition M de ce graphe (première ligne pour V, deuxième ligne pour S)

   Pour tout entier naturel non nul n, on note :

   P_n la probabilité que le n-ième site soit infecté, Q_n la probabilité que le n-ième site soit sain et $X_n = (P_n \quad Q_n)$.

   On a donc $X_1 = (1 \quad 0)$ (traduisant que le site n° 1 est infecté) et $X_{n+1} = X_n\, M$.
3. (a) En utilisant la relation $X_{n+1} = X_n M$, montrer que $P_{n+1} = 0,2P_n$.

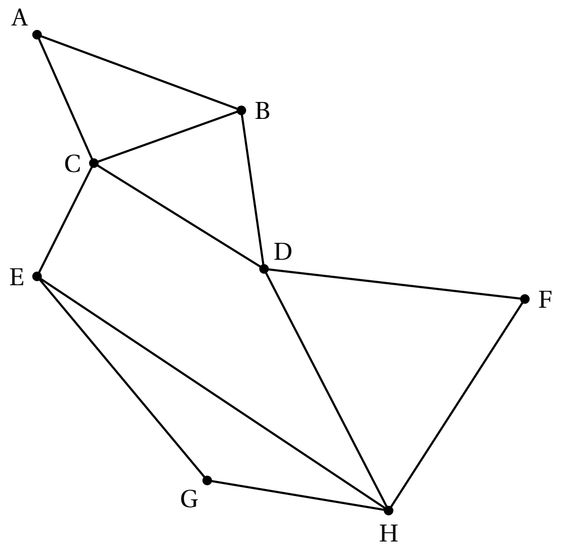
   (b) En déduire P_n en fonction de n.

   (c) Déterminer la limite de la suite (P_n) lorsque n tend vers plus l'infini.

retour au tableau

70. Pondichery avril 2011

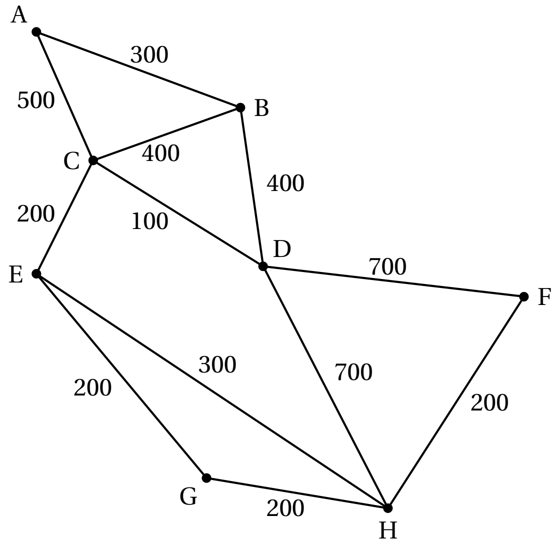
Un orchestre doit effectuer une tournée passant par les villes A, B, C, D, E, F, G et H, en utilisant le réseau autoroutier.
Le graphe Γ ci-dessous représente les différentes villes de la tournée et les autoroutes reliant ces villes (une ville est représentée par un point, une autoroute par une arête) :



1. Est-il possible d'organiser la tournée en passant au moins une fois par chaque ville, tout en empruntant une fois et une seule chaque tronçon d'autoroute ? (la réponse sera justifiée).
   Si oui citer un trajet de ce type.
2. On appelle M la matrice associée au graphe Γ (les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique).
   On donne la matrice M^3 :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 & 7 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 6 & 6 & 4 & 9 & 7 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 9 & 4 & 3 & 5 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & 7 & 3 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 2 & 3 & 5 & 3 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 4 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 8 & 7 & 5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

   Combien existe-t-il de chemins de longueur 3 reliant B à H ? (la réponse devra être justifiée).
   Préciser ces chemins.
3. Des contraintes de calendrier imposent en fait d'organiser un concert dans la ville F immédiatement après un concert dans la ville A.
   Le graphe Γ est complété ci-dessous par les longueurs en kilomètres de chaque tronçon (les longueurs des segments ne sont pas proportionnelles aux distances).



Déterminer, en utilisant un algorithme dont on citera le nom, le trajet autoroutier le plus court (en kilomètres) pour aller de A à F.

Préciser la longueur en kilomètres de ce trajet.

retour au tableau

71. Amérique nord juin 2010

Pendant ses vacances d'été, Alex a la possibilité d'aller se baigner tous les jours. S'il va se baigner un jour, la probabilité qu'il aille se baigner le lendemain est de $0,7$.
S'il ne va pas se baigner un jour, la probabilité qu'il aille se baigner le lendemain est de $0,9$. Le premier jour de ses vacances, Alex va se baigner.
n étant un entier naturel non nul, on note :

- a_n la probabilité qu'Alex n'aille pas se baigner le n-ième jour.
- b_n la probabilité qu'Alex aille se baigner le n-ième jour.
- $P_n = (a_n \quad b_n)$ la matrice ligne traduisant l'état probabiliste le n-ième jour.

On a donc $P_1 = (0 \quad 1)$

1. (a) Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B (B représentant l'état « Alex va se baigner »).
   (b) Soit M la matrice de transition associée à ce graphe. Recopier et compléter $M = \begin{pmatrix} 0,1 & \dots \\ \dots & 0,7 \end{pmatrix}$
2. Calculer P_3, P_{10} et P_{20}. Quelle conjecture peut-on faire ?
3. (a) Montrer que pour tout entier n non nul, $b_{n+1} = 0,9a_n + 0,7b_n$.
   (b) En déduire que : $b_{n+1} = -0,2b_n + 0,9$.
4. On considère la suite u définie pour tout entier n non nul par $u_n = b_n - 0,75$.
   (a) Montrer que u est une suite géométrique de raison $-0,2$; on précisera son premier terme.
   (b) Déterminer la limite de la suite u.
   (c) En déduire $\lim_{n \to +\infty} b_n$.
5. On suppose dans cette question que le premier jour de ses vacances, Alex ne va pas se baigner. Quelle est la probabilité qu'il aille se baigner le 20^{e} jour de ses vacances ?

retour au tableau

72. Antilles juin 2010

M. et M[me] Martin, qui habitent une grand ville, aiment beaucoup voyager. Ils prévoient toujours de partir pendant l'été, soit à l'étranger, soit de visiter une région en France.
S'ils sont restés en France une année donnée, la probabilité qu'ils partent à l'étranger l'année suivante est de 0,4.
Par contre, s'ils sont partis à l'étranger une année donnée, la probabilité qu'ils retournent à l'étranger l'années suivante est de 0,7.
En été 2009, ce couple est parti à l'étranger.
Pour tout entier naturel n, on note P_n la matrice ligne $(a_n \quad b_n)$ traduisant l'état probabiliste l'année $(2009+n)$, où a_n désigne la probabilité que ce couple soit resté en France l'année $(2009+n)$ et b_n la probabilité que ce couple soit parti à l'étranger l'année $(2009+n)$.

Partie A

1. (a) Traduire les données par un graphe probabiliste dont les sommets seront notés F et E (F pour France et E pour étranger).
   (b) En déduire la matrice de transition en prenant tout d'abord F puis E pour l'ordre des sommets. On notera M cette matrice.
2. (a) Donner P_0, l'état probabiliste initial, l'année 2009.
   (b) On donne les résultats suivants :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0,48 & 0,52 \\ 0,39 & 0,61 \end{pmatrix} ; M^3 = \begin{pmatrix} 0,444 & 0,556 \\ 0,417 & 0,583 \end{pmatrix} ; M^4 = \begin{pmatrix} 0,4332 & 0,5668 \\ 0,4251 & 0,5749 \end{pmatrix}.$$

   En choisissant la bonne matrice, calculer P_3. En déduire la probabilité que ce couple parte à l'étranger en 2012 *(On donnera le résultat sous forme décimale arrondie au centième).*
3. Soit P la matrice ligne $(x \quad y)$ donnant l'état stable où x et y sont deux réels positifs tels que $x+y=1$.
   Déterminer l'état stable puis interpréter le résultat.

Partie B

1. Montrer que pour tout entier naturel n on a : $a_{n+1} = 0,3a_n + 0,3$.
2. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = a_n - \dfrac{3}{7}$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   (b) En déduire l'expression de u_n, puis celle de a_n en fonction de n.
   (c) Déterminer la limite de la suite (a_n) lorsque n tend vers $+\infty$. Que retrouve-t-on ?

retour au tableau

73. La reunion juin 2010

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Une étude statistique est réalisée chaque trimestre sur une population composée initialement de fumeurs. Certains d'entre eux s'arrêtent de fumer, d'autres qui ont arrêté, redeviennent fumeur.

On estime que :

— si un individu est fumeur, la probabilité qu'il arrête de fumer (qu'il devienne non fumeur) le trimestre suivant est 0,2 ;

— si un individu a arrêté de fumer (il est considéré alors comme non fumeur), la probabilité qu'il redevienne fumeur le trimestre suivant est 0,3.

On notera X l'évènement « l'individu est fumeur »et Y l'évènement « l'individu est non fumeur ».

1. Représenter les données précédentes par un graphe probabiliste et donner sa matrice de transition que l'on notera M (aucune justification n'est demandée, on respectera l'ordre alphabétique des sommets).
2. Pour un entier naturel n donné, on note x_n la proportion de fumeurs dans la population et y_n la proportion de non fumeurs au trimestre de rang n. On note $E_n = \begin{pmatrix} x_n & y_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste du système au trimestre de rang n.
   On étudie une population initiale où tous les individus sont fumeurs. On a donc : $E_0 = (1 \quad 0)$.
   (a) Vérifier que la proportion de fumeurs à l'issue de deux trimestres est 0,7.
   (b) Déterminer l'état E_4 de la population à l'issue d'une année.
3. La répartition fumeurs/non fumeurs de la population converge vers un état stable : $E = (x \quad y)$.
   Déterminer cet état.

Partie B

Le chiffre d'affaires d'un débitant de tabac sur une période donnée est fonction de deux variables : le nombre de consommateurs, c'est-à-dire de fumeurs, et le prix moyen du paquet de tabac.

On appelle z le chiffre d'affaire en milliers d'euros, x le nombre de consommateurs en milliers et y le prix du paquet de tabac en euros. On admettra que $z = xy$.

Dans l'espace, muni d'un repère orthonormal $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on désigne par S la surface d'équation $z = xy$.

1. Le débitant a pour clients 1 000 consommateurs réguliers et le prix moyen du paquet de tabac est de 5 euros.
   (a) Quel est le chiffre d'affaires réalisé par le débitant ?
   (b) Soit, dans un plan P parallèle au plan de base xOy, la ligne de niveau $z = 5$ de la surface S.
   On a tracé cette ligne de niveau sur la figure 1 donnée en annexe 1. Donner son équation de la forme $y = f(x)$.

   Le nombre de consommateurs passe de 1 000 à 600. Quel devrait être, au centime d'euros près, le nouveau prix du paquet de tabac pour que le chiffre d'affaires du débitant reste égal à 5 000 € ?

ANNEXE 1 - Exercice (candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

Ligne de niveau $z = 5$ de la surface S.

retour au tableau

74. Polynésie juin 2010

Dans une société, le service informatique utilise deux logiciels de gestion : d'une part, le logiciel Aurora, leader du marché, et d'autre part le logiciel Bestmath, son concurrent. Le chef de réseau informatique enregistre chaque année, en janvier et en juillet, le nombre d'utilisateurs des deux logiciels et fournit des rapports réguliers sur le comportement des utilisateurs.
Lors de l'enquête de janvier 2009, le chef de réseau a constaté que 32 % des informaticiens utilisait le logiciel Aurora, les autres informaticiens utilisaient le logiciel Bestmath.
Lors de chaque relevé suivant (juillet 2009, janvier 2010, ...), le chef du réseau informatique a constaté que 20 % des utilisateurs du logiciel Aurora avaient changé de logiciel et utilisaient désormais le logiciel Bestmath, tandis que 25 % des utilisateurs du logiciel Bestmath avaient changé de logiciel et utilisaient désormais Aurora.
Les semestres sont comptés à partir de janvier 2009, que l'on appellera semestre 0 (juillet 2009 est donc le semestre 1).
Pour tout entier naturel n, on désigne par :

- a_n la probabilité qu'un informaticien pris au hasard utilise le logiciel Aurora le semestre n ;
- b_n la probabilité qu'un informaticien pris au hasard utilise le logiciel Bestmath le semestre n.

1. (a) Traduire les données l'énoncé par un graphe probabiliste.
   (b) Écrire la matrice de transition M associée à ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.
2. (a) On note $\mathrm{P}_0 = (a_0 \quad b_0)$ l'état initial de ce graphe en janvier 2009. Déterminer P_0.
   (b) On appelle P_1 l'état de la société en juillet 2009. Vérifier que
   $\mathrm{P}_1 = (0,426 \quad 0,574)$.
   (c) On appelle P_2 l'état en janvier 2010. Déterminer P_2 (les résultats seront arrondis à 10^{-3}).
3. Dans cette partie on étudie la suite (a_n).
   (a) Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $a_{n+1} = 0,55a_n + 0,25$.
   (b) On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par :
   $U_n = \dfrac{5}{9} - a_n$.
   Démontrer que la suite (U_n) est géométrique, déterminer sa raison ainsi que le premier terme.
   (c) En déduire l'expression de U_n puis de a_n en fonction de n.
4. Soit $\mathrm{P} = (x \quad y)$ l'état probabiliste stable.
   (a) Déterminer x et y.
   (b) *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans dans l'évaluation.*
   On suppose que l'utilisation du logiciel Aurora dans l'entreprise progresse régulièrement de la même façon. Le distributeur du logiciel Aurora peut-il espérer que son logiciel soit utilisé un jour par plus de 60 % des informaticiens de l'entreprise ?

retour au tableau

75. Liban mai 2010

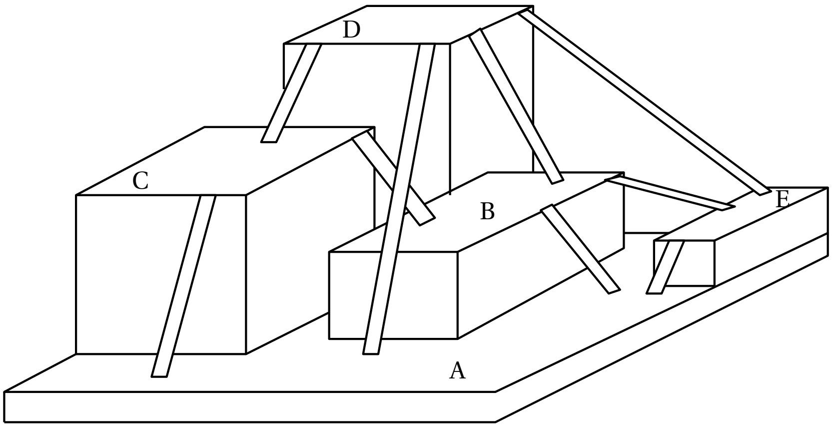
Deux chaînes de télévision A et B programment chaque semaine, à la même heure, deux émissions concurrentes. On suppose que le nombre global de téléspectateurs de ces émissions reste constant.
La première semaine, 70 % de ces téléspectateurs ont regardé la chaîne A.
Une étude statistique montre que :
15 % des téléspectateurs qui ont regardé la chaîne A une semaine, regardent la chaîne B la semaine suivante.
10 % des téléspectateurs qui ont regardé la chaîne B une semaine, regardent la chaîne A la semaine suivante. On note respectivement a_n et b_n les proportions de téléspectateurs des chaînes A et B la n-ième semaine et P_n la matrice ligne $(a_n \quad b_n)$. On a donc $P_1 = (0,7 \quad 0,3)$.

1. (a) Déterminer le graphe probabiliste représentant la situation.
   (b) Donner la matrice de transition M associée à ce graphe.
2. Calculer M^3 à l'aide de la calculatrice, donner les résultats en arrondissant à 10^{-3} près. Quelle est la répartition des téléspectateurs entre les deux chaînes lors de la quatrième semaine ?
3. On considère la matrice ligne $P = (a \quad b)$, où a et b sont deux réels tels que $a + b = 1$.
   (a) Déterminer a et b pour que $P = PM$.
   (b) Interpréter les deux valeurs trouvées.
4. On admet que pour tout entier naturel $n > 0$, on a : $a_n = 0,4 + 0,3 \times \left(0,75^{n-1}\right)$.
   (a) Résoudre l'inéquation $a_n < 0,5$.
   (b) À partir de quelle semaine l'audience de l'émission de la chaîne B dépassera-t-elle celle de l'émission de la chaîne A ?

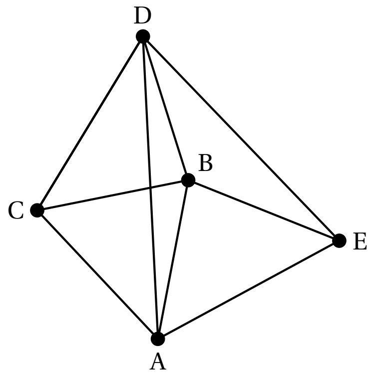
retour au tableau

76. Pondichéry avril 2010

On considère un espace de jeu réservé à des enfants.
Les enfants peuvent se déplacer sur cinq plates-formes notées A, B, C, D et E.
Ces plates-formes sont reliées entre elles par un certain nombre de rampes, comme indiqué sur le schéma ci-dessous :



On représente cet espace de jeu par le graphe G ci-contre :
Une plate-fonne est représentée par un sommet et une rampe est représentée par une arête.



Partie A

1. Donner un sous-graphe complet d'ordre 4 du graphe G.
2. En déduire un encadrement du nombre chromatique du graphe G, Justifier la réponse.
3. Proposer une coloration du graphe G en expliquant la méthode utilisée.
4. En déduire la valeur du nombre chromatique du graphe G.

Partie B

1. Ce graphe est-il connexe ? Est-il complet ? Justifier les réponses.
2. Ce graphe contient-il une chaine eulérienne ? Justifier la réponse.
3. Si on rajoute une arête à ce graphe, quels sommets peut-on alors relier pour que le graphe obtenu contienne un cycle eulérien ? Justifier la réponse.

Partie C

On décide de peindre les surfaces des cinq plates-formes en attribuant des couleurs différentes à deux plates-formes reliées par une rampe.

1. Quel est le nombre minimum de couleurs nécessaire ? Justifier la réponse.
2. On propose aux enfants le jeu suivant : il s'agit de partir de la plateforme C et de rejoindre la plateforme E en utilisant toutes les rampes, et sans passer deux fois par la même rampe.
   Proposer un chemin remplissant les conditions exposées ci-dessus.
3. Pour faciliter le déplacement des enfants dans cet espace de jeu, on décide d'installer une nouvelle rampe. Où peut-on placer cette rampe pour obtenir l'existence d'un chemin qui, partant d'une plate-fonne donnée, emprunte une et une seule fois chaque rampe pour revenir à la plate-fonne initiale ? Justifier la réponse.

retour au tableau

77. Nouvelle Calédonie nov 2009

Par suite d'une forte augmentation du prix des carburants de 2007 à 2008, certains salariés d'une entreprise changent de mode de déplacement pour se rendre sur leur lieu de travail.
En 2007, 60 % des salariés utilisaient leur voiture personnelle.
En 2008, 30 % des salariés utilisant leur voiture en 2007 ne l'utilisent plus et 5 % des personnes ne l'utilisant pas en 2007 l'utilisent en 2008.
On appelle les états suivants :

A l' état : « la personne utilise sa voiture » ;

B l' état : « la personne n'utilise pas sa voiture ».

On suppose que cette évolution se poursuit d'une année à l'autre à partir de 2008 et on appelle, pour tout entier naturel n, P_n, la matrice ligne donnant l'état probabiliste des moyens de déplacement des salariés de cette entreprise au cours de l'année $(2007+n)$.
On pose $P_n = (a_n \quad b_n)$ et on a $P_0 = (0,6 \quad 0,4)$.

1. Tracer un graphe probabiliste représentant la situation décrite ci-dessus.
2. Donner la matrice de transition correspondant à ce graphe probabiliste, en respectant l'ordre alphabétique des sommets.
3. En supposant que cette évolution se poursuive et en utilisant la question précédente, quelle est la probabilité qu'un salarié de cette entreprise utilise sa voiture personnelle en 2009 ? En 2010 ?
   (On arrondira les résultats obtenus au centième).
4. (a) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a la relation : $a_{n+1} = 0,7a_n + 0,05b_n$.
   En déduire que $a_{n+1} = 0,65a_n + 0,05$.
   (b) On admet que a_n peut alors s'écrire, pour tout entier naturel n,
   $a_n = \dfrac{1}{7} + \dfrac{16}{35} \times 0,65^n$.
   Vérifier la validité de cette formule pour a_0, a_1 et a_2.
5. (a) Déterminer la limite de la suite (a_n).
   (b) En supposant que cette évolution se poursuive, est-il possible d'envisager qu'à terme aucun des salariés de cette entreprise n'utilise sa voiture personnelle pour aller au travail ?
   Justifier la réponse.

retour au tableau

78. Antilles sept 2009

Partie A

Dans une résidence de vacances d'été, les touristes vont tous les jours à la plage. Ils disposent pour se déplacer de deux moyens de locomotion : un minibus ou des bicyclettes. Le séjour dure un mois pour tous les vacanciers.

Chaque jour, ils peuvent modifier leur choix de transport. Le premier jour, 80 % des touristes choisissent le minibus.

On considère qu'ensuite, chaque jour, 30 % de ceux qui ont pris le minibus la veille choisissent la bicyclette et 15 % des vacanciers qui avaient emprunté la bicyclette la veille, choisissent le minibus.

Soit n est un entier entre 1 et 31. On appelle $P_n = (a_n \quad b_n)$ la matrice traduisant l'état probabiliste relatif au n-ième jour, où :

a_n représente la proportion des vacanciers choisissant le minibus le jour n ;

b_n représente la proportion des vacanciers choisissant la bicyclette le jour n.

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste.
2. Écrire la matrice de transition, notée M, associée à cette situation.
3. Déterminer l'état initial P_1.
4. (a) Calculer P_2 (faire apparaître les calculs). Interpréter le résultat obtenu.

   (b) On suppose que $\text{M}^5 = \begin{pmatrix} 0,367 & 0,633 \\ 0,317 & 0,683 \end{pmatrix}$ et $\text{M}^6 = \begin{pmatrix} 0,352 & 0,648 \\ 0,324 & 0,676 \end{pmatrix}$, les coefficients ayant été arrondis au millième.

   En utilisant la matrice qui convient, déterminer la répartition prévisible le 6$^{\text{e}}$ jour. On donnera le résultat en pourcentage arrondi à 1 % près.
5. Soit P= $(x \quad y)$ la matrice correspondant à l'état stable.

   Déterminer x et y ; en donner une interprétation.
6. Montrer que pour n entier compris entre 1 et 30 on a $a_{n+1} = 0,55a_n + 0,15$.

Partie B

Pour n entier, $n \geqslant 1$, on définit la suite (u_n) par :

$$u_{n+1} = 0,55u_n + 0,15 \quad \text{et} \quad u_1 = 0,8.$$

1. On pose $U_n = u_n - \dfrac{1}{3}$.

   Montrer que la suite (U_n) est géométrique. On précisera la raison et le premier terme de cette suite.
2. Exprimer U_n puis u_n en fonction de n.
3. En déduire la limite de la suite (u_n). Quel résultat retrouve-t-on ?

retour au tableau

79. Polynésie sept 2009

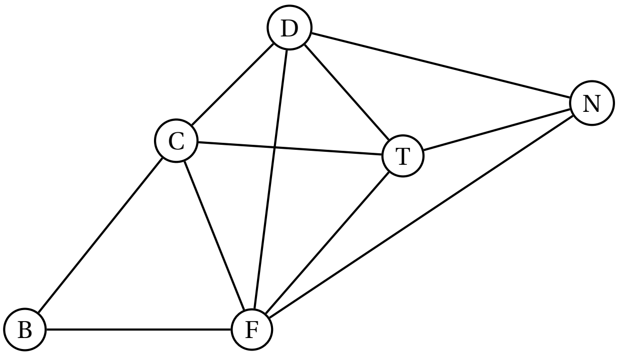
On considère une population donnée d'une île de Bretagne se rendant régulièrement sur le continent. Deux compagnies maritimes A et B effectuent la traversée.
En 2008, 60 % de la population voyage avec la compagnie A. Les campagnes publicitaires font évoluer cette répartition. Une enquête indique alors que chaque année 20 % des clients de la compagnie A l'abandonnent au profit de la compagnie B et que 10 % des clients de la compagnie B choisissent la compagnie A.
Pour tout entier naturel n, l'état probabiliste de l'année $2008+n$ est défini par la matrice ligne $\begin{pmatrix}x_n & y_n\end{pmatrix}$ où x_n désigne la proportion de la population qui voyage avec la compagnie A et y_n la proportion de la population qui voyage avec la compagnie B.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.
2. Écrire la matrice de transition M de ce graphe en prenant les sommets A et B dans cet ordre.
3. Préciser l'état initial P_0 puis montrer que $P_1 = \begin{pmatrix}0,52 & 0,48\end{pmatrix}$.
4. Déterminer la répartition prévisible du trafic entre les compagnies A et B en 2011.
5. Déterminer l'état stable et l'interpréter.
6. Montrer que, pour tout entier naturel n, $x_{n+1} = 0,7x_n + 0,1$.
7. On admet que, pour tout entier naturel n, $x_n = \dfrac{4}{15} \times 0,7^n + \dfrac{1}{3}$.
   Déterminer la limite de la suite (x_n) et l'interpréter.

retour au tableau

80. Amérique du Nord juin 2009

Un groupe d'amis organise une randonnée dans les Alpes.
On a représenté par le graphe ci-dessous les sommets B, C, D, F, T, N par lesquels ils peuvent choisir de passer. Une arête entre deux sommets coïncide avec l'existence d'un chemin entre les deux sommets.



1. (a) Recopier et compléter le tableau suivant :

Sommets	B	C	D	F	N	T
Degré des sommets du graphe						

   (b) Justifier que le graphe est connexe.

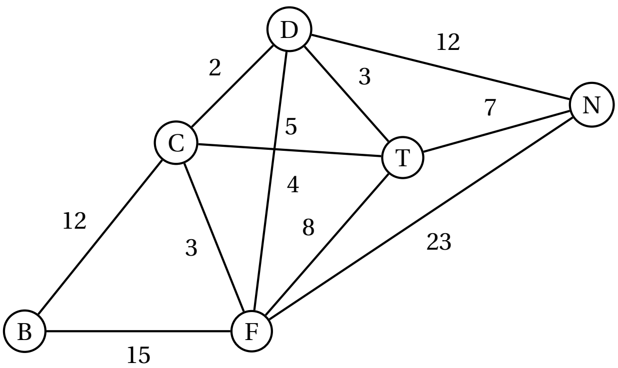
2. Le groupe souhaite passer par les six sommets en passant une fois et une seule par chaque chemin.
   Démontrer que leur souhait est réalisable. Donner un exemple de trajet possible.

3. Le groupe souhaite associer chaque sommet à une couleur de sorte que les sommets reliés par un chemin n'ont pas la même couleur. On note n le nombre chromatique du graphe.

   (a) Montrer que $4 \leqslant n \leqslant 6$.

   (b) Proposer un coloriage du graphe permettant de déterminer son nombre chromatique.

4. Le groupe se trouve au sommet B et souhaite se rendre au sommet N. Les distances en kilomètres entre chaque sommet ont été ajoutées sur le graphe.



   Indiquer une chaîne qui minimise la distance du trajet. Justifier la réponse.

retour au tableau

81. Asie juin 2009

Un enfant joue aux fléchettes. Un adulte observe son jeu et remarque que si l'enfant atteint la cible lors d'un lancer, alors il atteint encore la cible au lancer suivant avec une probabilité égale à $\frac{3}{4}$.

Si l'enfant n'atteint pas la cible lors d'un lancer, alors il atteint la cible au lancer suivant avec une probabilité égale à $\frac{1}{8}$.

Lors du premier lancer, l'enfant atteint la cible avec une probabilité égale à $\frac{1}{10}$.

1. On note C l'état : « l'enfant atteint la cible » et on note R l'état : « l'enfant n'atteint pas la cible ».
   (a) Représenter la situation par un graphe probabiliste.
   (b) Écrire la matrice de transition M de ce graphe en considérant les états dans l'ordre alphabétique.
2. On désigne par n un nombre entier naturel non nul.
   Soient C_n l'évènement : « l'enfant atteint la cible au n-ième lancer » et R_n l'évènement : « l'enfant n'atteint pas la cible au n-ième lancer ». L'état probabiliste lors du n-ième lancer est donné par la matrice ligne $E_n = (c_n \quad r_n)$ où c_n désigne la probabilité de l'évènement C_n et r_n la probabilité de l'évènement R_n.
   (a) Écrire la matrice ligne E_1 de l'état probabiliste initial.
   (b) Déterminer la matrice ligne E_3 et donner une interprétation du résultat obtenu.
3. Soit $E = (c \quad r)$ la matrice ligne de l'état probabiliste stable.
   (a) Déterminer c et r.
   (b) L'adulte affirme qu'après un très grand nombre de lancers, l'enfant a deux fois plus de chance de manquer la cible que de l'atteindre. Cette affirmation est-elle justifiée ?

retour au tableau

82. Centres Etrangers juin 2009

Chaque mois, un institut de sondage donne la cote de popularité d'un même groupe politique dans l'opinion publique. Les personnes sondées sont, soit favorables, soit défavorables à ce groupe. Initialement, il y a autant de personnes favorables à ce groupe politique que de personnes qui lui sont défavorables. De chaque mois au mois suivant, on considère que :

— 10 % des personnes qui étaient favorables à ce groupe politique ne le sont plus.

— 15 % des personnes qui n'étaient pas favorables à ce groupe politique le deviennent.

On note, pour tout entier naturel n :

— a_n, la probabilité qu'une personne interrogée au hasard au bout de n mois soit favorable à ce groupe politique.

— b_n, la probabilité qu'une personne interrogée au hasard au bout de n mois ne soit pas favorable à ce groupe politique.

— $P_n = (a_n \quad b_n)$, la matrice traduisant l'état probabiliste au bout de n mois.

On note M la matrice de transition telle que, pour tout entier naturel n : $P_{n+1} = P_n \times M$.

Première partie

1. Déterminer la matrice P_0 donnant l'état probabiliste initial.
2. Déterminer le graphe probabiliste correspondant à la situation.
3. On admet que $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$.

   Déterminer la matrice P_2 en détaillant les calculs, (on donnera les coefficients sous forme décimale arrondie au centième).
4. Déterminer l'état stable et interpréter ce résultat.

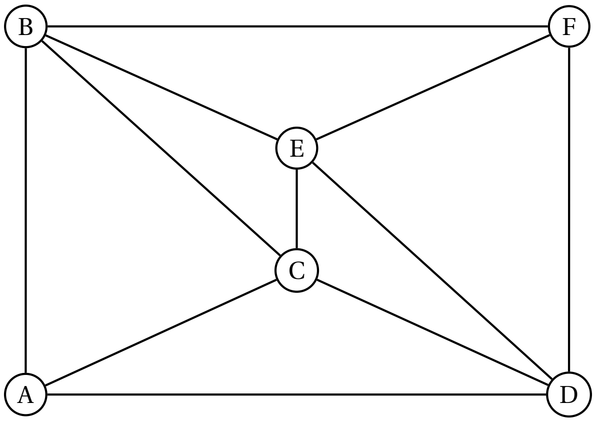
Deuxième partie

1. Montrer que $a_{n+1} = 0,75a_n + 0,15$ pour tout entier naturel n.
2. On considère la suite (u_n) telle que $u_n = a_n - 0,6$ pour tout entier naturel n.
   (a) Démontrer que la suite (u_n) est géométrique de raison $0,75$.
   (b) En déduire que $a_n = -0,1 \times (0,75)^n + 0,6$ pour tout entier naturel n.
   (c) Calculer la limite de a_n quand n tend vers $+\infty$. Comment peut-on interpréter cette limite ? En quoi ce résultat est-il cohérent avec celui demandé à la question 4. de la première partie.

retour au tableau

83. Antilles juin 2009

On considère le graphe G suivant :



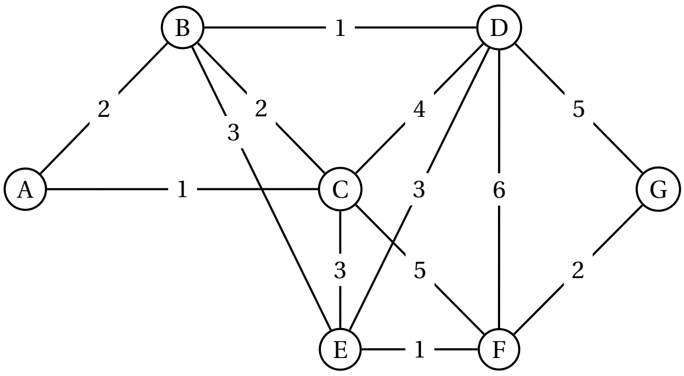
1. Le graphe G est-il connexe ? Expliquer la réponse.
2. Le graphe G admet-il des chaînes eulériennes ? Si oui, en préciser une.
3. Justifier la non-existence d'un cycle eulérien pour le graphe G. Quelle arête peut-on alors ajouter à ce graphe pour obtenir un graphe contenant un cycle eulérien ?
4. Déterminer un encadrement du nombre chromatique du graphe G. Justifier la réponse.
5. Déterminer alors ce nombre chromatique, en explicitant clairement la démarche.
6. Déterminer la matrice M associée à ce graphe (les sommets sont pris dans l'ordre alphabétique).
7. On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 8 & 16 & 6 & 5 \\ 10 & 6 & 11 & 6 & 11 & 10 \\ 8 & 11 & 8 & 11 & 11 & 6 \\ 10 & 6 & 11 & 6 & 11 & 10 \\ 6 & 11 & 11 & 11 & 8 & 8 \\ 5 & 10 & 6 & 10 & 8 & 4 \end{pmatrix}$.

   Déterminer le nombre de chaînes de longueur 3 partant du sommet A et aboutissant au sommet F. Citer alors toutes ces chaînes.

retour au tableau

84. Métropole juin 2009

Le graphe ci-dessous représente le plan d'une ville.
Le sommet A désigne l'emplacement des services techniques.
Les sommets B, C, D, E, F et G désignent les emplacements de jardins publics. Une arête représente l'avenue reliant deux emplacements et est pondérée par le nombre de feux tricolores situés sur le trajet.



Les parties I et II sont indépendantes.

Partie I

On s'intéresse au graphe non pondéré.

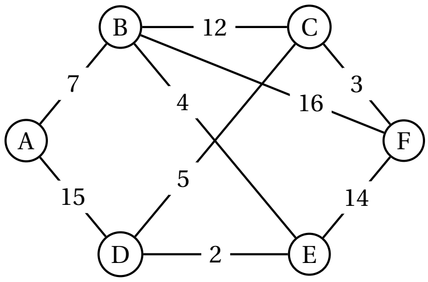
1. Répondre sans justification aux quatre questions suivantes :
   (a) Ce graphe est-il connexe ?
   (b) Ce graphe est-il complet ?
   (c) Ce graphe admet-il une chaîne eulérienne ?
   (d) Ce graphe admet-il un cycle eulérien ?
2. Déterminer, en justifiant, le nombre chromatique de ce graphe.

Partie II

On s'intéresse au graphe pondéré.
Proposer un trajet comportant un minimum de feux tricolores reliant A à G.
La réponse sera justifiée par un algorithme.
retour au tableau

85. Pondichéry avril 2009

Une agence de voyages organise différentes excursions dans une région du monde et propose la visite de sites incontournables, nommés A, B, C, D, E et F.
Ces excursions sont résumées sur le graphe ci-dessous dont les sommets désignent les sites, les arêtes représentent les routes pouvant être empruntées pour relier deux sites et le poids des arêtes désigne le temps de transport (en heures) entre chaque site.



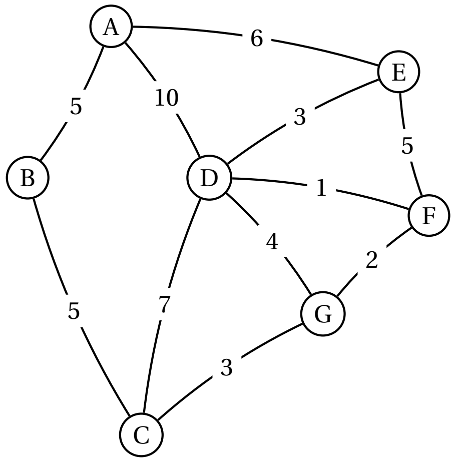
1. Justifier que ce graphe est connexe.
2. Un touriste désire aller du site A au site F en limitant au maximum les temps de transport.
   (a) En utilisant un algorithme, déterminer la plus courte chaîne reliant le sommet A au sommet F.
   (b) En déduire le temps de transport minimal pour aller du site A au site F.
3. Un touriste désirant apprécier un maximum de paysages souhaite suivre un parcours empruntant toutes les routes proposées une et une seule fois.
   Si ce parcours existe, le décrire sans justifier ; dans le cas contraire justifier qu'un tel parcours n'existe pas.

retour au tableau

86. Amérique du Sud nov 2008

Partie A

Laurent s'occupe de distribuer le courrier dans les bureaux d'une grande entreprise.
Le graphe ci-dessous représente les différents parcours qu'il peut faire pour distribuer le courrier dans les bureaux A, B, C, D, E, F et G.
Le poids de chaque arête indique le nombre d'obstacles (portes, escaliers, machines à café...) qui nuisent à la distribution du courrier.



Laurent se voit confier par le bureau A un colis à livrer au bureau G.
Indiquer un parcours qui permette à Laurent de partir du bureau A pour arriver au bureau G en rencontrant le minimum d'obstacles.

Partie B

Pris par le temps, il n'est pas rare de voir Laurent oublier de livrer le courrier du matin !
On considère que :

- Si Laurent a distribué le courrier du matin un certain jour, la probabilité qu'il y pense le lendemain est de $0,7$.
- Si Laurent a oublié de distribuer le courrier du matin un certain jour, la probabilité pour qu'il oublie à nouveau le lendemain est de $0,8$.

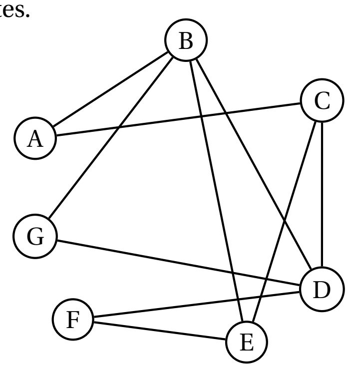
Le lundi matin 1er octobre, Laurent a bien distribué le courrier.
On note a_n la probabilité que Laurent distribue le courrier le n-ième jour de travail (on considère donc que le lundi 1er octobre est le premier jour et que $a_1 = 1$).

1. Traduire les données de cet exercice à l'aide d'un graphe probabiliste. Préciser la matrice de transition associée à ce graphe.
2. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, on a : $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,2$.
3. On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \geqslant 1$, par $u_n = a_n - 0,4$.
   (a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $0,5$. Calculer son premier terme.
   (b) En déduire, pour tout $n \geqslant 1$, la valeur de a_n en fonction de n.

retour au tableau

87. Nouvelle Calédonie 2008

Sur le graphe ci-contre, les sept sommets A, B, C, D, E, F et G correspondent à sept villes. Une arête reliant deux de ces sommets indique l'existence d'une liaison entre les deux villes correspondantes.

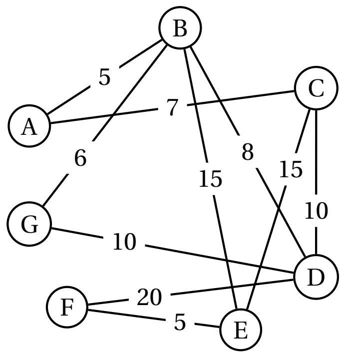


1. Est-il possible de trouver un trajet, utilisant les liaisons existantes, qui part d'une des sept villes et aboutit à une ville en passant une fois et une seule fois par toutes les arêtes ? En donner un si c'est possible.
2. Est-il possible de trouver un trajet, utilisant les liaisons existantes, qui part d'une des sept villes et y revient en passant une fois et une seule fois par toutes les autres villes ? En donner un si c'est possible.
3. Donner, en justifiant un encadrement du nombre chromatique de grapghe puis déterminer le nombre chromatique du graphe en proposant un coloriage.
4. On note M la matrice associée au graphe ci-dessus. Les sommets sont rangés suivant l'ordre alphabétique.

   On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 6 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 1 & 10 & 9 & 1 & 5 \\ 6 & 1 & 0 & 9 & 8 & 0 & 3 \\ 1 & 10 & 9 & 2 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & 9 & 8 & 1 & 0 & 6 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 7 & 6 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 5 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

   Donner le nombre de chemins de longueur 3 qui relient le sommet A au sommet F.
   Les citer tous. Aucune justification n'est demandée.
5. On donne ci-dessous et sur le graphe ci-contre les distances exprimées en centaines de kilomètres entre deux villes pour lesquelles il existe une liaison :
   AB : 5 ; AC : 7 ; BD : 8 ; BE : 15 ;
   BG : 6 ;CD : 10 ; CE : 15 ; DF : 20 ;
   DG : 10 ; EF : 5 ;
   Un représentant de commerce souhaite aller de la ville A à la ville F.

   En expliquant la méthode utilisée, déterminer le trajet qu'il doit suivre pour que la distance parcourue soit la plus courte possible et donner cette distance.



retour au tableau

88. Métropole sept 2008

Dans le cadre de la restructuration de son entreprise, afin de garantir la stabilité du nombre d'emplois, le directeur souhaite qu'à long terme plus de 82 % de ses employés ne travaillent que le matin.

Pour cela, il décide que désormais :

- 20 % des employés travaillant le matin une semaine donnée travaillent l'après-midi la semaine suivante.
- 5 % des employés travaillant l'après-midi une semaine donnée travaillent aussi l'après-midi la semaine suivante.

On note :
A : « L'employé travaille le matin »
B : « L'employé travaille l'après-midi »

1. (a) Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.
   (b) Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.
2. La semaine notée 0, semaine de la décision, 60 % des employés travaillent le matin et les autres l'après-midi.
   (a) Donner la matrice ligne notée P_0 décrivant l'état initial des employés dans cette entreprise.
   (b) Calculer la probabilité qu'un employé travaille le matin lors de la semaine 2, deuxième semaine après la prise de décision,
3. Soit $P = (x \quad y)$ l'état probabiliste stable.
   (a) Démontrer que x et y vérifient l'égalité $x = 0,8x + 0,95y$.
   (b) Déterminer x et y.
   (c) Le souhait du directeur de cette entreprise est-il réalisable ? Justifier la réponse.
4. On admet qu'un an après cette décision la probabilité qu'un employé travaille le matin est égale à $\frac{19}{23}$. On choisit alors quatre employés au hasard. Le grand nombre d'employés de l'entreprise permet d'assimiler ces choix à des tirages successifs indépendants avec remise.
   Déterminer la probabilité qu'au moins un des quatre employés travaille l'après-midi et donner sa valeur décimale arrondie au millième.

retour au tableau

89. Antilles juin 2008

Un ciné-club qui projette des films français et étrangers dispose de deux salles. Les abonnés au ciné-club assistent systématiquement à une projection chaque lundi soir.

- La probabilité qu'un spectateur ayant vu un film français à une séance retourne voir un film français à la séance suivante est égale à $0,6$.
- La probabilité qu'un spectateur ayant vu un film étranger à une séance aille voir un film français à la séance suivante est égale à $0,75$.

Un lundi soir, un film français est projeté dans chacune des deux salles. Puis les semaines suivantes, le ciné-club propose dans une salle un film français et dans l'autre un film étranger.
On cherche à étudier l'évolution de la répartition des spectateurs entre les deux salles au cours des semaines suivantes, à partir de ce lundi.

1. On note A l'état : « le spectateur voit un film français ».
   On note B l'état : « le spectateur voit un film étranger ».
   (a) Représenter la situation ci-dessus par un graphe probabiliste.
   (b) On note M la matrice de transition de ce graphe en considérant les états dans l'ordre alphabétique. Justifier que $M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,75 & 0,25 \end{pmatrix}$
2. Soient A_n l'évènement : « Le spectateur voit un film français à la n-ième séance » et B_n l'évènement : « Le spectateur voit un film étranger à la n-ième séance ».
   L'état probabiliste de la répartition des abonnés dans les deux salles lors de la n-ième séance est donné par la matrice ligne $T_n = (a_n \quad b_n)$ ou $a_n = P(\mathrm{A}_n)$, $b_n = P(\mathrm{B}_n)$ et $a_n + b_n = 1$.
   L'état probabiliste initial est donc donné par $T_1 = (1 \quad 0)$.
   Déterminer les matrices T_2 et T_3. En donner une interprétation en termes de répartition des abonnés dans les deux salles.
3. Déterminer la valeur arrondie au centième des réels x et y définissant l'état limite $T = (x \quad y)$ vers lequel converge la suite (T_n). Interpréter le résuitat.

retour au tableau

90. Métropole juin 2008

Deux fabricants de parfum lancent simultanément leur nouveau produit qu'ils nomment respectivement Aurore et Boréale.
Afin de promouvoir celui-ci, chacun organise une campagne de publicité.
L'un d'eux contrôle l'efficacité de sa campagne par des sondages hebdomadaires.
Chaque semaine, il interroge les mêmes personnes qui toutes se prononcent en faveur de l'un de ces deux produits.

Au début de la campagne, 20 % des personnes interrogées préfèrent Aurore et les autres préfèrent Boréale. Les arguments publicitaires font évoluer cette répartition : 10 % des personnes préférant Aurore et 15 % des personnes préférant Boréale changent d'avis d'une semaine sur l'autre.

La semaine du début de la campagne est notée semaine 0.
Pour tout entier naturel n, l'état probabiliste de la semaine n est défini par la matrice ligne $P_n = (a_n \quad b_n)$, où a_n désigne la probabilité qu'une personne interrogée au hasard préfère Aurore la semaine n et b_n la probabilité que cette personne préfère Boréale la semaine n.

1. Déterminer la matrice ligne P_0 de l'état probabiliste initial.
2. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B, A pour Aurore et B pour Boréale.
3. (a) Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.
   (b) Montrer que la matrice ligne P_1 est égale à $(0,3 \quad 0,7)$.
4. (a) Exprimer, pour tout entier naturel n, P_n en fonction de P_0 et de n.
   (b) En déduire la matrice ligne P_3. Interpréter ce résultat.

Dans la question suivante, toute trace de recherche même incomplète ou d'initiative même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

5. Soit $P = (a \quad b)$ la matrice ligne de l'état probabiliste stable.
   (a) Déterminer a et b.
   (b) Le parfum Aurore finira-t-il par être préféré au parfum Boréale ? Justifier.

retour au tableau

91. La Réunion juin 2008

Les joueurs d'un club de football sont partagés en deux équipes : une équipe A et une équipe B.
L'entraîneur change la composition de ces équipes après chacun des matchs, suivant les performances des joueurs.

Une étude statistique menée au cours des saisons précédentes permet d'estimer que :

— si un joueur fait partie de l'équipe A, la probabilité qu'il reste dans cette équipe pour le match suivant est 0,6 ;

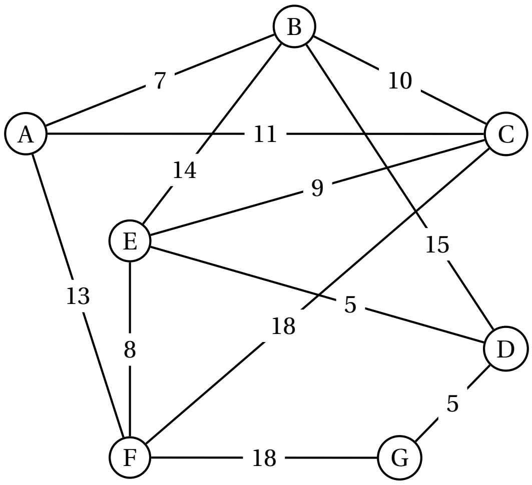
— si un joueur fait partie de l'équipe B, la probabilité qu'il change d'équipe le match suivant est 0,2.

1. Représenter les données précédentes par un graphe probabiliste G de sommets A et B et donner sa matrice de transition.
2. Pour un entier naturel n donné, on note $P_n = (a_n \quad b_n)$ la matrice ligne décrivant l'état probabiliste lors du match n.
   Paul vient d'arriver dans le club et la probabilité a_0 qu'il joue dans l'équipe A pour le match de préparation (match 0) est 0,1.
   L'état probabiliste initial est donc $P_0 = (0,1 \quad 0,9)$.
   (a) Vérifier que $P_1 = (0,24 \quad 0,76)$ et calculer P_2.
   (b) Quelle est la probabilité que Paul joue dans l'équipe A lors du deuxième match de championnat (match 2) ? (on donnera la valeur approchée du résultat arrondie à 10^{-2} près)
3. On admet que, pour tout entier naturel n : $a_{n+1} = 0,4a_n + 0,2$. On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = a_n - \frac{1}{3}$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,4 et de premier terme $v_0 = \frac{-7}{30}$.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n et en déduire que, pour tout entier naturel n : $a_n = \frac{1}{3}\left(1 - 0,7 \times 0,4^n\right)$
   (c) Déduire de ce qui précède la limite de la suite (a_n). Quel est l'état stable du graphe G ?

retour au tableau

92. Polynésie juin 2008

Une grande ville a mis en place un système de location de bicyclettes en libre service.Un abonné peut ainsi louer une bicyclette dans une station puis la déposer dans n'importe quelle station de son choix. la ville comporte sept stations de location nommées A, B, C, D, E, F et G.
Les stations sont reliées entre elles par une piste cyclable et les temps de parcours en minutes sont indiqués sur le graphe ci-contre.



1. Philippe, cycliste très prudent, décide de visiter cette ville en n'empruntant que des pistes cyclables. A-t-il la possibilité d'effectuer un parcours empruntant une fois et une seule toutes les pistes cyclables. Justifier la réponse. À la fin de ce parcours, pourra-t-il rendre sa bicyclette dans la station de départ ? Justifier la réponse.
2. On appelle M la matrice associée à ce graphe. on donne deux matrices N et T :

$$N = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 8 & 5 & 5 & 9 & 2 \\ 9 & 6 & 10 & 7 & 10 & 6 & 4 \\ 8 & 10 & 8 & 5 & 10 & 9 & 4 \\ 5 & 7 & 5 & 2 & 8 & 4 & 5 \\ 5 & 10 & 10 & 8 & 6 & 11 & 2 \\ 9 & 6 & 9 & 4 & 11 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 4 & 5 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 8 & 4 & 5 & 9 & 1 \\ 9 & 6 & 10 & 6 & 10 & 6 & 4 \\ 8 & 10 & 8 & 4 & 10 & 9 & 4 \\ 5 & 7 & 5 & 2 & 8 & 4 & 5 \\ 5 & 8 & 10 & 8 & 6 & 11 & 0 \\ 9 & 6 & 9 & 4 & 11 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 5 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Une des deux matrices N ou T est la matrice M^3. Sans calcul, indiquer quelle est la matrice M^3. Justifier la réponse.

   (b) Philippe a loué une bicyclette à la station F et l'a rendue à la station E. Au cours de son déplacement, il est passé exactement deux fois devant une station. Combien de trajets différents a-t-il pu suivre ? Expliquer.

3. Le lendemain, il envisage de rejoindre le plus rapidement possible la station G en partant de la station A. À l'aide d'un algorithme, déterminer un tel parcours et donner le temps nécessaire pour l'effectuer.

retour au tableau

93. Amérique du Nord mai 2008

Les parties I et II sont indépendantes

Partie I (calculs exacts demandés)
Sur une route, deux intersections successives, « a » et « b » sont munies de feux tricolores. On suppose que ces feux ne sont pas synchronisés et fonctionnent de manière indépendante On admet que :

— La probabilité que le feu de « a » soit vert est égale à $\frac{3}{4}$;

— La probabilité que le feu de « b » soit vert est égale à $\frac{1}{2}$.

On note A l'évènement : « le feu de « a » est vert », B l'évènement « le feu de « b » est vert ».
Un automobiliste passe successivement aux deux intersections « a" et « b ».

1. Calculer la probabilité qu'à son passage, les deux feux soient verts.
2. Calculer la probabilité qu'à son passage, il rencontre au moins un feu vert.

Partie II (résultats demandés à 10^{-2} près)
Pour se rendre à son travail, Mathurin rencontre une succession d'intersections de feux tricolores dont le fonctionnement est décrit ci-dessous :
À chaque intersection :

— Si le feu est vert, il le sera à l'intersection suivante avec la probabilité 0,9 ou sera rouge avec la probabilité 0,05.

— Si le feu est orange, il le sera à l'intersection suivante avec la probabilité 0,1 ou sera vert avec la probabilité 0,8.

— Si le feu est rouge, il le sera à l'intersection suivante avec la probabilité 0,5 ou sera orange avec la probabilité 0,05.

n étant un entier naturel non nul, on note :

— V_n la probabilité que Mathurin rencontre un feu vert à la n-ième intersection,

— O_n la probabilité que Mathurin rencontre un feu orange a la n-ième intersection,

— R_n la probabilité que Mathurin rencontre un feu rouge à la n-ième intersection,

— $P_n = [V_n \ \ O_n \ \ R_n]$ la matrice traduisant l'état probabiliste du n-ième feu tricolore.

1. (a) Construire un graphe probabiliste pour décrire cette situation.
   (b) Donner la matrice de transition M complétée de ce graphe :

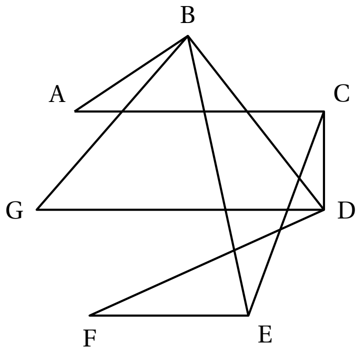
$$M = \begin{bmatrix} \dots & 0,05 & 0,05 \\ 0,8 & \dots & 0,1 \\ 0,45 & \dots & 0,5 \end{bmatrix}$$

2. (a) Si le premier feu rencontré est vert, donner la matrice P_1 de l'état initial puis calculer P_2.
   (b) On donne $P_3 = [0,87 \ \ 0,05 \ \ 0,08]$. Quelle est la probabilité que le quatrième feu soit vert ?
3. Si le premier feu rencontré est rouge, donner la matrice P_1 de l'état initial puis calculer P_2.
4. On remarque que, quelle que soit la couleur du premier feu rencontré, on obtient à partir d'un certain rang n : $P_n = [0,85 \ \ 0,05 \ \ 0,10]$.
   Donner une interprétation concrète de ce résultat.

retour au tableau

94. Nouvelle Calédonie nov 2007

Sur le graphe ci-contre, les sept sommets A, B, C, D, E, F et G correspondent à sept villes. Une arête reliant deux de ces sommets indique l'existence d'une liaison entre les deux villes correspondantes.



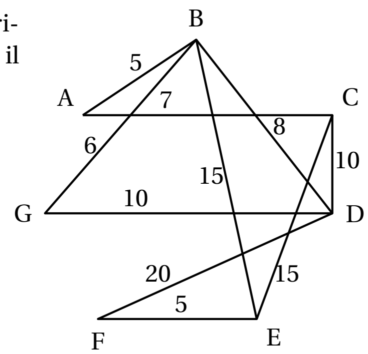
Les questions 1, 2 *et* 3 *sont indépendantes.*

1. Est-il possible de trouver un trajet, utilisant les liaisons existantes, qui part d'une des sept villes et y revient en passant une fois et une seule fois par toutes les autres villes ?
2. On note M la matrice associée au graphe ci-dessus. Les sommets sont rangés suivant l'ordre alphabétique.

   On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 6 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 1 & 10 & 9 & 1 & 5 \\ 6 & 1 & 0 & 9 & 8 & 0 & 3 \\ 1 & 10 & 9 & 2 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & 9 & 8 & 1 & 0 & 6 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 7 & 6 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 5 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

   Donner le nombre de chemins de longueur 3 qui relient le sommet A au sommet F.
   Les citer tous. Aucune justification n'est demandée.

3. On donne ci-dessous et sur le graphe ci-contre les distances exprimées en centaines de kilomètres entre deux villes pour lesquelles il existe une liaison :
AB : 5 ; AC : 7 ;
BD : 8 ; BE : 15 ;
BG : 6 ; CD : 10 ;
CE : 15 ; DF : 20 ;
DG : 10 ; EF : 5 ;
Un représentant de commerce souhaite aller de la ville A à la ville F.

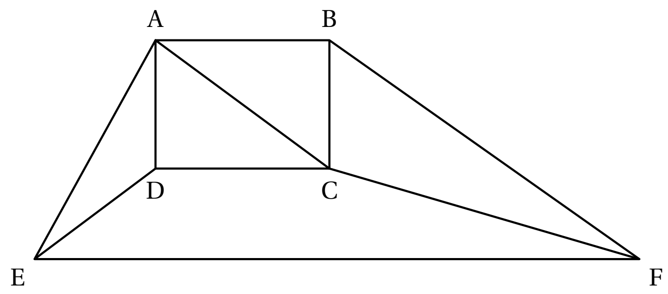


En expliquant la méthode utilisée, déterminer le trajet qu'il doit suivre pour que la distance parcourue soit la plus courte possible et donner cette distance.

retour au tableau

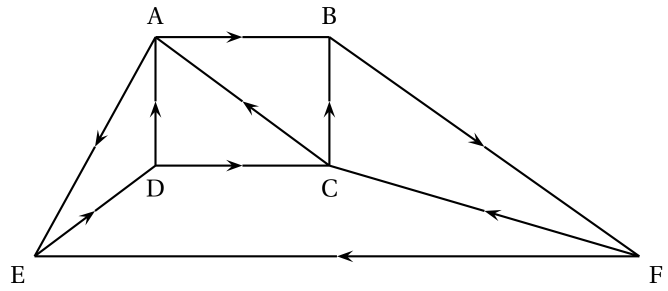
95. La Réunion sept 2007

Partie I
Le graphe suivant représente le plan d'une ville. Les arêtes du graphe représentent ses avenues commerçantes et les sommets du graphe les carrefours de ces avenues.



1. Donner l'ordre de ce graphe, puis le degré de chacun de ses sommets.
2. Un piéton peut-il parcourir toutes ces avenues sans emprunter plusieurs fois la même avenue ? Justifier votre réponse.

Partie II
Dans le graphe suivant, on a indiqué le sens de circulation dans les différentes avenues.

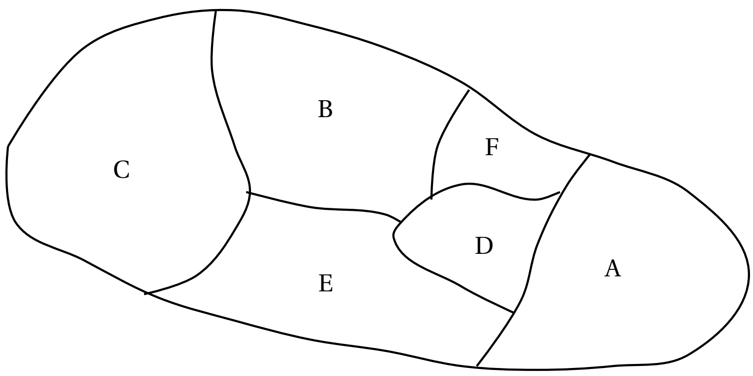


1. Écrire la matrice M associée à ce graphe.
   (On rangera les sommets dans l'ordre alphabétique).
2. (a) Quel est le nombre de trajets de longueur 2 reliant D à B ?
   (b) Comment pourrait-on obtenir ce résultat uniquement par le calcul à partir de la matrice M ?

retour au tableau

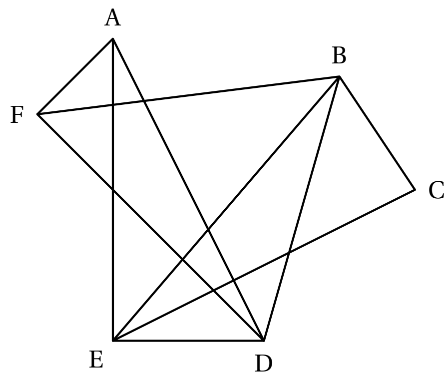
96. Asie juin 2007

Une île imaginaire dont la carte est représentée ci-dessous ; est composée de six provinces, notées A, B, C, D, E et F.



On s'intéresse aux frontières séparant ces provinces. On traduit cette situation par un graphe dont les sommets sont les provinces et o chaque arête représente une frontière entre deux provinces.

On admet que le graphe $\mathscr{G}$ ci-dessous représente cette situation :



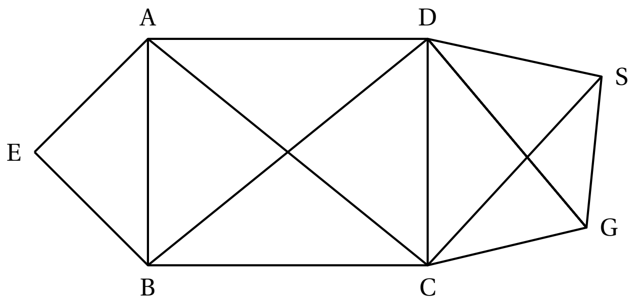
1. (a) Donner l'ordre du graphe $\mathscr{G}$, puis le degré de chacun de ses sommets
   (b) Peut-on visiter cette île en franchissant une et une seule fois chacune des dix frontières ? Justifier Si oui, proposer un parcours possible.
2. (a) Le graphe $\mathscr{G}$ possède-t-il un sous-graphe complet d'ordre 3 ? Si oui, en citer un.
   Préciser, sans justification, si le graphe $\mathscr{G}$ possède un sous graphe complet d'ordre 4.
   Quelle consequence cela a-t-il sur le nombre chromatique c du graphe $\mathscr{G}$?
   (b) Proposer une coloration de la carte (ou du graphe) avec le minimum de couleurs afin que deux provinces qui ont une frontière commune aient des couleurs différentes (on peut remplacer les couleurs par différents hachurages).

retour au tableau

97. Centres Etrangers juin 2007

Les parties A *et* B *sont indépendantes*

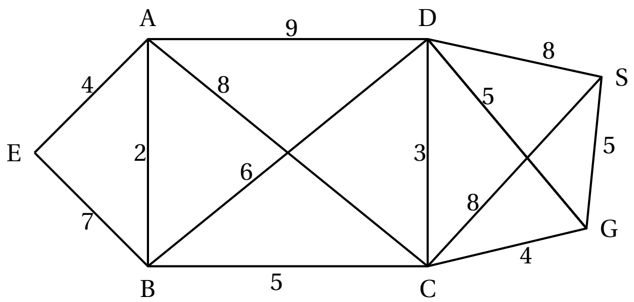
L'objet d'étude est le réseau des égouts d'une ville. Ce réseau est modélisé par le graphe ci-dessous : les sommets représentent les stations et les arêtes, les canalisations.



Partie A

1. Ce graphe admet-iI une chaîne eulérienne ?
2. Justifier que le nombre chromatique de ce graphe est compris entre 4 et 6.

Partie B



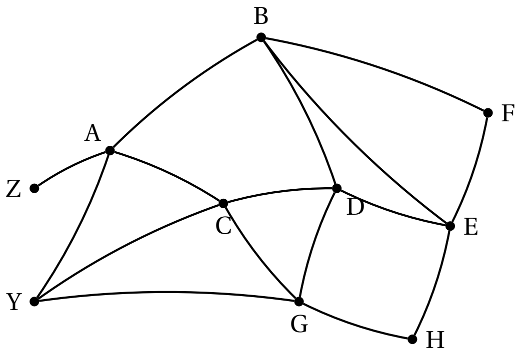
Le graphe pondéré ci-dessus donne, en minutes, les durées des trajets existant entre les différentes stations du réseau des égouts.

1. Un ouvrier doit se rendre par ce réseau de la station E à la station S. Déterminer, en utilisant un algorithme, le trajet le plus rapide pour aller de E à S et préciser sa durée.
2. Ayant choisi le trajet le plus rapide, l'ouvrier arrivant en C, apprend que les canalisations CG et CS sont fermées pour cause de travaux et qu'il ne peut les utiliser.
   (a) Comment peut-il terminer, au plus vite, son trajet jusqu'à S ? Combien de temps le trajet entre E et S prendra-t-il dans ce cas ?
   (b) S'il avait su dès le départ que les canalisations CG et CS étaient impraticables, quel trajet aurait choisi l'ouvrier pour se rendre, au plus vite de E à S ? Combien de temps ce trajet aurait-il pris ?

retour au tableau

98. Amérique du Nord mai 2007

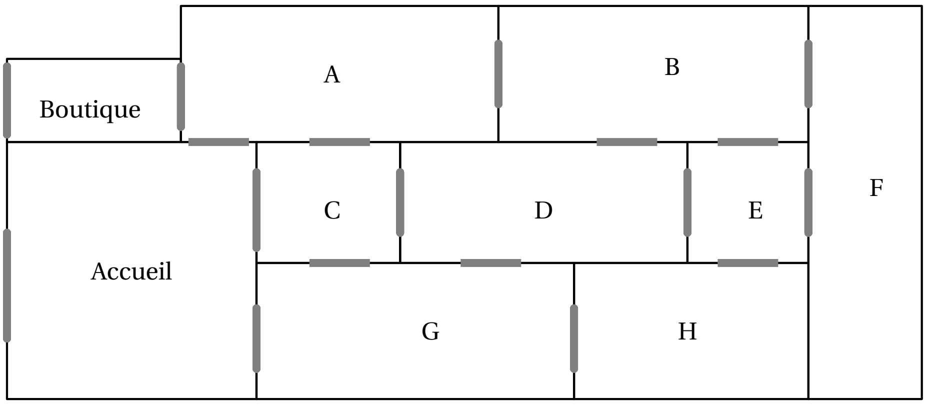
Première Partie : Étude d'un graphe



On considère le graphe ci-dessus.

1. (a) Ce graphe est-il connexe ?
   (b) Déterminer le degré de chacun des sommets.
   On pourra donner le résultat sous forme de tableau.
   (c) Justifier l'existence d'une chaîne eulérienne.
2. (a) Déterminer un encadrement du nombre chromatique de ce graphe.
   (b) Montrer que ce nombre chromatique est égal à 3.

Deuxième Partie : Visite d'un musée



Voici le plan d'un musée : les parties grisées matérialisent les portes et les visiteurs partent de l'accueil, visitent le musée et doivent terminer leur visite àa la boutique.

1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe en précisant ce que représentent arêtes et sommets.
2. (a) Pourquoi est-il possible de trouver un circuit o les visiteurs passent une fois et une seule par toutes les portes ?
   (b) Donner un exemple d'un tel circuit.
3. Comment colorier les salles y compris l'accueil et la boutique, en utilisant un minimum de couleurs, pour que deux salles qui communiquent par une porte aient des couleurs différentes ?

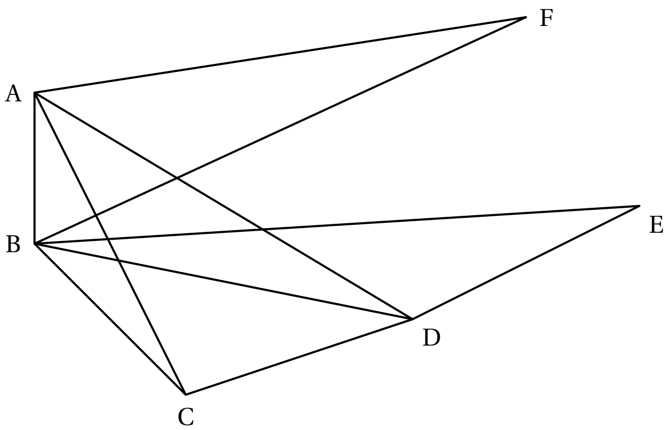
retour au tableau

99. Liban mai 2007

Une grande ville a créé un jardin pédagogique sur le thème de l'écologie, jardin qui doit être visité par la suite par la majorité des classes de cette ville.
Ce jardin comporte six zones distinctes correspondant aux thèmes :

A. Eau	B. Économie d'énergies	C. Plantations et cultures locales
D. Développement durable	E. Biotechnologies	F. Contes d'ici (et d'ailleurs)

Ces zones sont reliées par des passages (portes) où sont proposés des questionnaires.
Le jardin et les portes sont représentés par le graphe ci-dessous (chaque porte et donc chaque questionnaire est représenté par une arête).



Question préliminaire :
Si un visiteur répond à tous les questionnaires, à combien de questionnaires aura-t-il répondu ?

Partie A :

1. Donner la matrice G associée à ce graphe.
2. Le graphe est-il complet ? Est-il connexe ? Justifier.
3. Peut-on parcourir le jardin en répondant à tous les questionnaires et sans repasser deux fois devant le même questionnaire :
   (a) en commenant la visite par n'importe quelle zone ?
   (b) en commenant la visite par la zone C (plantations et cultures) ? Dans ce cas, si la réponse est positive, quelle sera la dernière zone visitée.
   (Dans les deux cas, **a** et **b**, justifiez votre réponse.)

Partie B :
Pour illustrer chaque zone et présenter légendes et commentaires, les enfants ont décidé d'utiliser des supports de couleurs différentes. Pour limiter le nombre de couleurs, on utilise des couleurs différentes seulement si les zones sont limitrophes (avec un passage entre les deux).

1. Donner et justifier un encadrement du nombre chromatique de ce graphe.
2. Déterminer alors en utilisant un algorithme adapté le nombre chromatique de ce graphe et proposer une répartition des couleurs.

retour au tableau

100. Nouvelle Calédonie mars 2007

Deux joueurs A et B, amateurs de tennis, décident de jouer une partie toutes les semaines.

- La probabilité que A gagne la partie de la première semaine est $0,7$.
- Si A gagne la partie de la semaine n, il garde la mme stratégie de jeu la semaine suivante, et la probabilité qu'il gagne alors la partie de la semaine $(n+1)$ est seulement de $0,4$.
- Si A perd la partie de la semaine n, il change de stratégie de jeu pour la semaine suivante, et alors, la probabilité qu'il gagne la partie de la semaine $(n + 1)$ est de $0,9$.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on désigne par A_n l'évènement : « A gagne la partie de la $n^{\text{ième}}$ semaine », par B_n l'évènement : « B gagne la partie de la $n^{\text{ième}}$ semaine », et on note $a_n = p\left(\text{A}_n\right)$.
Le but de cet exercice est de rechercher la limite de la suite (a_n), en utilisant deux méthodes différentes.

Première méthode : graphe probabiliste

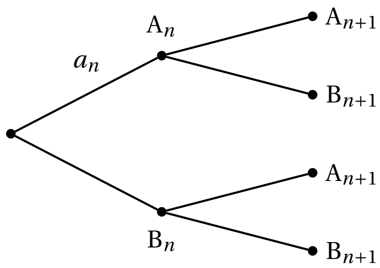
Pour tout entier naturel n non nul, on désigne par $P_n = \begin{pmatrix} a_n & 1-a_n\end{pmatrix}$ la matrice des probabilités associée à la $n^{\text{ième}}$ semaine.

1. Décrire cette situation à l'aide d'un graphe probabiliste, et donner la matrice M de transition associée à ce graphe.
2. On donne $M^2 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3\\ 0,45 & 0,55\end{pmatrix}$ et $M^3 = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,45\\ 0,675 & 0,325\end{pmatrix}$.
   Quelle est la probabilité pour que A gagne la partie de la $4^{\text{ème}}$ semaine ?
3. Déterminer la matrice ligne $P = \begin{pmatrix} x & 1-x\end{pmatrix}$ telle que $P \times M = P$.
4. En déduire la limite de la suite (a_n) et interpréter le résultat obtenu.

Deuxième méthode : probabilité et suites

Dans cette deuxième partie, on ne tient pas compte de résultats démontrés dans la partie précédente.

1. (a) Recopier sur votre copie l'arbre ci-dessous, et compléter l'arbre avec les 5 probabilités manquantes.

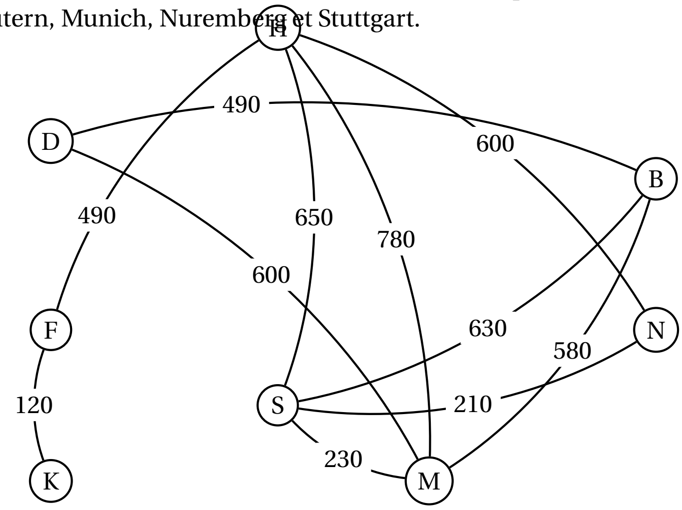


   (b) Justifier que $a_{n+1} = 0,9 - 0,5a_n$ pour tout entier n supérieur ou égal à 1.
2. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par : $u_n = a_n - 0,6$.
   (a) Démontrer que (u_n) est une suite géométrique de raison $(-0,5)$.
   (b) En déduire l'expression de a_n en fonction de n, puis la limite de la suite (a_n).

retour au tableau

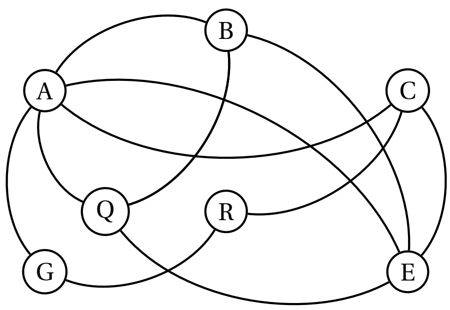
101. Amérique du Sud nov 2006

1. À l'occasion de la coupe du monde de football 2006 en Allemagne, une agence touristique organise des voyages en car à travers les différentes villes où se joueront les matchs d'une équipe nationale.
   Les routes empruntées par les cars sont représentées par le graphe ci-dessous. Le long de chaque arête figure la distance en kilomètres séparant les villes. Les lettres B, D, F, H, K, M, N et S représentent les villes Berlin, Dortmnd, Francfort, Hambourg, Kaiserslautern, Munich, Nuremberg et Stuttgart.



   En précisant la méthode utilisée, déterminer le plus court chemin possible pour aller de Kaiserslautern à Berlin en utilisant les cars de cette agence.

2. Pour des raisons de sécurité, les supporters de certaines équipes nationales participant à la coupe du monde de football en 2006 ne peuvent être logés dans le même hôtel.
   On donne ci-dessous le graphe d'incompatibilité entre les supporters de différentes équipes : par exemple, un supporter de l'équipe A ne peut être logé avec un supporter de l'équipe B.



   (a) Déterminer le nombre chromatique de ce graphe en justifiant la valeur trouvée.
   (b) Proposer une répartition des supporters par hôtel en utilisant un nombre minimum d'hôtels.

retour au tableau

102. Antilles sept 2006

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Sur une population donnée, abonnée à deux opérateurs téléphoniques A et B, on considère que, chaque année, 40 % des abonnés à l'opérateur A le quitte pour l'opérateur B et 10 % des abonnés à l'opérateur B le quitte pour l'opérateur A. On néglige les nouveaux abonnés.
On suppose de plus qu'en 2005, 25 % de cette population est abonnée à l'opérateur A.

Partie A

1. Déterminer le graphe probabiliste correspondant à cette situation. En déduire la matrice de transition, notée M.
2. On note :
   - a_n la part des abonnés à l'opérateur A l'année $2005+n$
   - b_n la part des abonnés à l'opérateur B l'année $2005+n$
   - E_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$, correspondant à 'état probabiliste l'annie $2005+n$.

   (a) Préciser E_0.

   (b) Calculer E_1 en faisant apparaître vos calculs.

   (c) Déterminer la répartition prévisible de cette population en 2013.
   On pourra utiliser la calculatrice et on donnera le résultat sous forme décimale arrondie au centième.

   (d) Soit E la matrice $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ où a et b sont deux réels positifs tels que $a+b=1$.
   Déterminer a et b tels que $\mathrm{E} = \mathrm{E} \times \mathrm{M}$. Interpréter ce résultat.

Partie B

1. Montrer que $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,1$.
2. On pose, pour tout entier naturel n, $u_n = a_n - 0,2$.

   (a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

   (b) En déduire l'expression de u_n puis de a_n en fonction de n.

   (c) Déterminer la limite de la suite (a_n) lorsque n tend vers $+\infty$. Que retrouve-t-on ?

retour au tableau

103. Nouvelle Calédonie nov 2006

Une association sportive propose à ses adhérents de pratiquer au choix soit le karaté, soit le judo ; chaque adhérent pratique un et un seul de ces deux sports.
Chaque année les adhérents renouvellent tous leur adhésion. L'association n'accueille pas de nouveaux adhérents. Elle compte 800 adhérents.
Pour le renouvellement des adhésions, les données des années précédentes permettent d'envisager le modèle suivant :

— 70 % des adhérents qui étaient inscrits au karaté se réinscrivent au karaté,

— 20 % des adhérents qui étaient inscrits au judo s'inscrivent au karaté.

En 2003, 200 adhérents étaient inscrits dans la section karaté et 600 adhérents étaient inscrits dans la section judo.
On appelle $P_n = (a_n \quad b_n)$ la matrice traduisant la répartition des adhérents selon le sport pratiqué l'année $2003 + n$:

- a_n représente la proportion des adhérents inscrits au karaté l'année $2003 + n$
- b_n représente la proportion des adhérents inscrits au judo l'année $2003 + n$
- $a_n + b_n = 1$.

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste.
2. Déterminer l'état initial $P_0 = (a_0 \quad b_0)$.
3. (a) Déterminer la matrice de transition M associée au graphe. (Rappel M est la matrice telle que : $P_{n+1} = P_n \times M$.)
   (b) En admettant que, en 2005, 36,25 % des adhérents sont inscrits au karaté et 63,75 % des adhérents sont inscrits au judo, déterminer la répartition que le modèle envisagé permet de prévoir pour 2006. (Exprimer les résultats sous forme de pourcentages, puis donner les nombres d'adhérents correspondants.)
4. Soit $P = (x \quad y)$ la matrice correspondant à l'état stable, c'est à dire telle que $P \times M = P$. (Rappel : x et y sont des nombres réels tels que $x + y = 1$)
   (a) Déterminer les nombres x et y.
   (b) En déduire la limite de a_n quand n tend vers l'infini.
   Interpréter ce résultat.
5. Dans la même ville, un club de judo accepte de nouveaux adhérents : chaque année le nombre de ses adhérents augmente de 10 %.
   Le club comptait 405 adhérents en 2003. En utilisant une calculatrice, trouver en quelle année l'effectif de ce club sera pour la première fois supérieur à l'effectif de la section judo de l'association étudiée dans les questions précédentes ?

retour au tableau

104. Polynésie sept 2006

Une commune possède deux clubs de sport que l'on note A et B.
Le club A est installé depuis 1990, le club B a ouvert ses portes au cours de l'année 2004. Au premier janvier 2005, on constate que 1 100 personnes sont abonnées au club A et 400 au club B.
Le prix de l'abonnement est moins coûteux au club A; les activités proposées sont plus nombreuses au club B. Aussi, chaque année, 14 % des abonnés au club A changent pour le club B et 6 % des abonnés au club B changent pour le club A. On suppose que la population totale des abonnés reste constante et qu'une personne ne s'abonne jamais aux deux clubs en même temps.

On note a_n le nombre d'abonnés au club A et b_n le nombre d'abonnés au club B au premier janvier de l'année $2005+n$.
E_n désigne la matrice ligne $(a_n \;\; b_n)$; ainsi $E_0 = (a_0 \;\; b_0) = (1\,100 \;\; 400)$.

1. Traduire les données par un graphe probabiliste.
2. (a) Écrire la matrice de transition M telle que $E_{n+1} = E_n \times M$.
   En déduire E_n en fonction de E_0, M et n. On ne demande pas de démontrer le résultat.

   (b) Calculer M^2 . En déduire le nombre d'abonnés aux deux clubs au premier janvier 2007.
3. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a : $a_{n+1} = 0,8 \times a_n + 90$.

   (b) Pour n entier naturel, on pose : $u_n = a_n - 450$. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique.

   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $a_n = 650 \times 0,8^n + 450$.

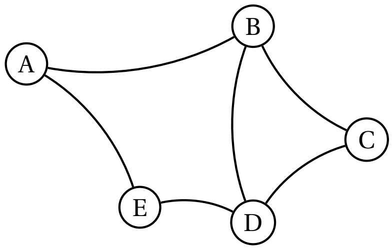
   (d) Déterminer la limite de a_n quand n tend vers $+\infty$. Interpréter ce résultat pour les deux clubs sportifs.

retour au tableau

105. Liban mai 2006

1. Dans un parc, il y a cinq bancs reliés entre eux par des allées.
   On modélise les bancs par les sommets A, B, C, D, E et les allées par les arêtes du graphe G ci-dessous :

   Graphe G

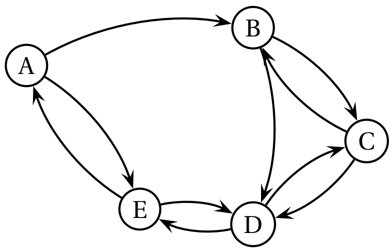
   

   (a) On désire peindre les bancs de façon que deux bancs reliés par une allée soient toujours de couleurs différentes.
   Donner un encadrement du nombre minimal de couleurs nécessaires et justifier.
   Déterminer ce nombre.

   (b) Est-il possible de parcourir toutes les allées de ce parc sans passer deux fois par la même allée ?

2. Une exposition est organisée dans le parc. La fréquentation devenant trop importante, on décide d'instaurer un plan de circulation : certaines allées deviennent à sens unique, d'autres restent à double sens. Par exemple la circulation dans l'allée située entre les bancs B et C pourra se faire de B vers C et de C vers B, alors que la circulation dans l'allée située entre les bancs A et B ne pourra se faire que de A vers B. Le graphe G′ ci-dessous modélise cette nouvelle situation :

   Graphe G′

   (a) Donner la matrice M associée au graphe G′. (On ordonnera les sommets par ordre alphabétique).

   (b) On donne $M^5 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 & 6 & 10 \\ 4 & 5 & 7 & 11 & 5 \\ 4 & 6 & 6 & 11 & 5 \\ 1 & 5 & 10 & 6 & 10 \\ 6 & 5 & 5 & 14 & 2 \end{pmatrix}$

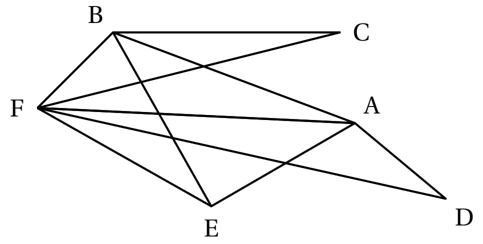
   Combien y a-t-il de chemins de longueur 5 permettant de se rendre du sommet D au sommet B ?
   Les donner tous.

   (c) Montrer qu'il existe un seul cycle de longueur 5 passant par le sommet A.
   Quel est ce cycle ?
   En est-il de même pour le sommet B ?

retour au tableau

106. Amérique du Nord juin 2004

Les parties A et B sont indépendantes.
Partie A
On considère le graphe G_1 ci-dessous :



1. Justifier les affirmations suivantes :
   A_1. Le graphe G_1 admet au moins une chaîne eulérienne.
   A_2. La chaîne DABCFBEFAE n'est pas une chaîne eulérienne de G_1.
2. Déterminer un sous-graphe complet de G_1, ayant le plus grand ordre possible. En déduire un minorant du nombre chromatique γ de ce graphe.
3. Déterminer un majorant de ce nombre chromatique. (On justifiera la réponse).
4. En proposant une coloration du graphe G_1, déterminer son nombre chromatique.

Partie B
Soit la matrice M d'un graphe orienté G_2 dont les sommets A, B, C, D et E sont pris dans l'ordre alphabétique.

On donne $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M^3 = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 4 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 5 & 3 & 6 \\ 5 & 7 & 4 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

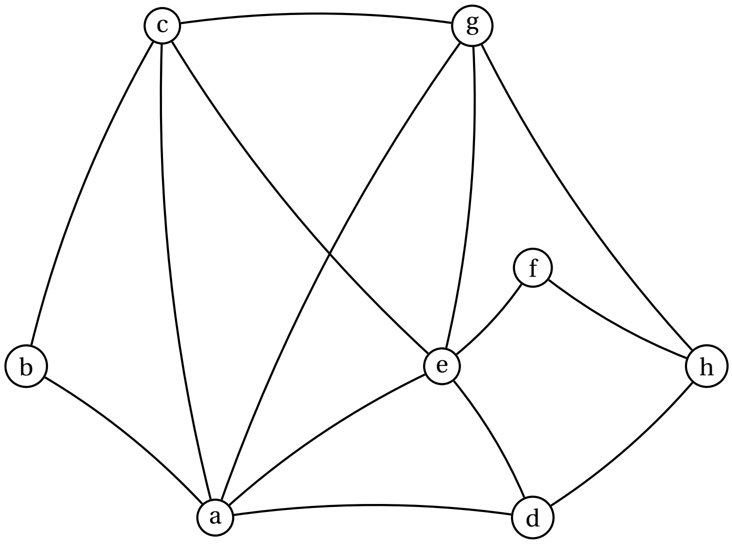
1. Construire le graphe G_2.
2. Déterminer le nombre de chaînes de longueur 3 reliant B à D. Les citer toutes.

retour au tableau

107. La Réunion juin 2004

Partie A

On note G le graphe représenté ci-dessous et M sa matrice obtenue en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique. La matrice M^3 est également donnée.



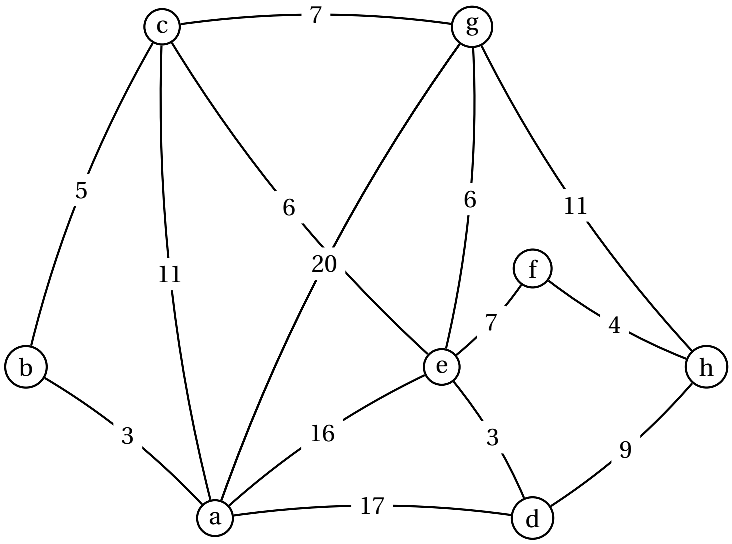
$$M^3 = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 11 & 10 & 12 & 5 & 13 & 4 \\ 8 & 2 & 7 & 3 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 11 & 7 & 8 & 6 & 12 & 3 & 10 & 5 \\ 10 & 3 & 6 & 2 & 11 & 1 & 4 & 8 \\ 12 & 5 & 12 & 11 & 8 & 8 & 13 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 8 & 0 & 2 & 6 \\ 13 & 4 & 10 & 4 & 13 & 2 & 6 & 9 \\ 4 & 3 & 5 & 8 & 3 & 6 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

Dire, en justifiant votre réponse, si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

1. L'ordre du graphe est égal au plus grand des degrés des sommets.
2. Le graphe G contient un sous-graphe complet d'ordre 3.
3. Les sommets de G peuvent être coloriés avec trois couleurs sans que deux sommets adjacents soient de même couleur.
4. Il est possible de parcourir ce graphe en passant une fois et une seule par chaque arête.
5. Il existe au moins un chemin de longueur 3 qui relie chaque sommet à chacun des sept autres sommets du graphe.
6. il y a 72 chemins de longueur 3 qui relient le sommet e à chacun des huit sommets du graphe.

Partie B

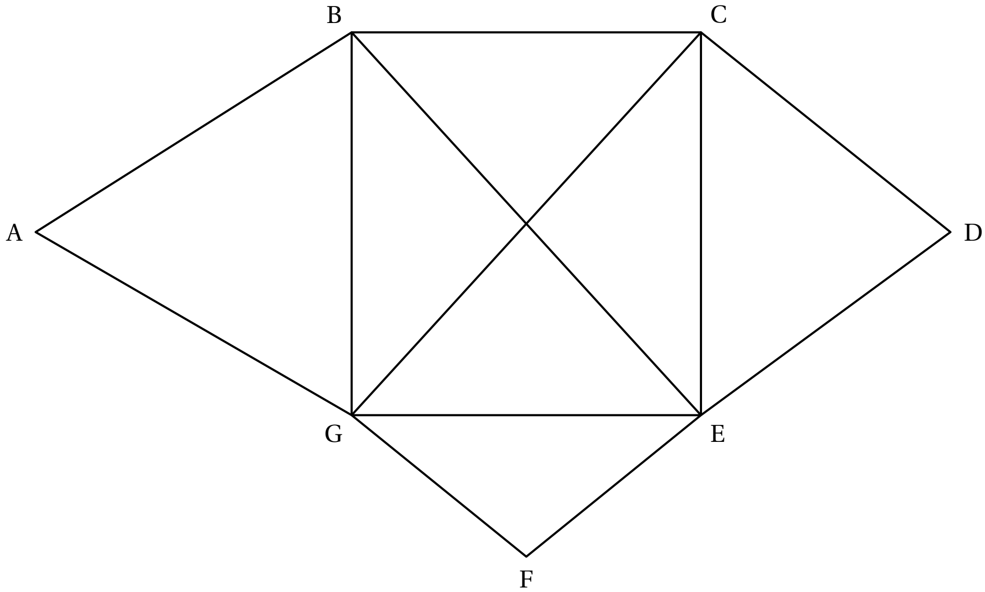
Le graphe précédent représente un réseau de lignes d'autobus. Les sommets du graphe désignent les arrêts. Les poids des arêtes sont les durées de parcours, en minutes, entre deux arrêts (correspondances comprises).



Déterminer, à l'aide d'un algorithme, la durée minimum pour aller de l'arrêt a à l'arrêt h et donner ce trajet.
retour au tableau

108. Métropole 2004

Le graphe ci-dessous indique, sans respecter d'échelle, les parcours possibles entre les sept bâtiments d'une entreprise importante.



Un agent de sécurité effectue régulièrement des rondes de surveillance. Ses temps de parcours en minutes entre deux bâtiments sont les suivants :
AB : 16 minutes AG : 12 minutes ; BC : 8 minutes ; BE : 12 minutes ; BG : 8 minutes ; CD : 7 minutes ; CE : 4 minutes ; CG : 10 minutes ; DE : 2 minutes ; EF : 8 minutes ; EG : 15 minutes ; FG : 8 minutes.
Sur chaque arête, les temps de parcours sont indépendants du sens de parcours.

1. En justifiant la réponse, montrer qu'il est possible que l'agent de sécurité passe une fois et une seule par tous les chemins de cette usine. Donner un exemple de trajet.
2. L'agent de sécurité peut-il revenir à son point de départ après avoir parcouru une fois et une seule tous les chemins ? Justifier la réponse.
3. Tous les matins, l'agent de sécurité part du bâtiment A et se rend au bâtiment D.

   En utilisant un algorithme que l'on explicitera, déterminer le chemin qu'il doit suivre pour que son temps de parcours soit le plus court possible, et donner ce temps de parcours.

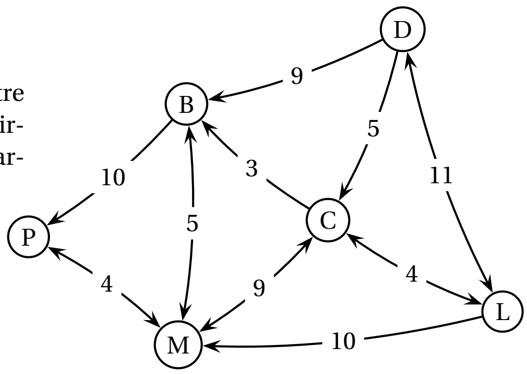
retour au tableau

109. Asie 2003

Dans la ville de GRAPHE, on s'intéresse aux principales rues permettant de relier différents lieux ouverts au public, à savoir la mairie (M), le centre commercial (C), la bibliothèque (B), la piscine (P) et le lycée (L). Chacun de ces lieux est désigné par son initiale. Le tableau ci-dessous donne les rues existant entre ces lieux.

	B	C	L	M	P
B		X		X	X
C	X		X	X	
L		X		X	
M	X	X	X		X
P	X			X	

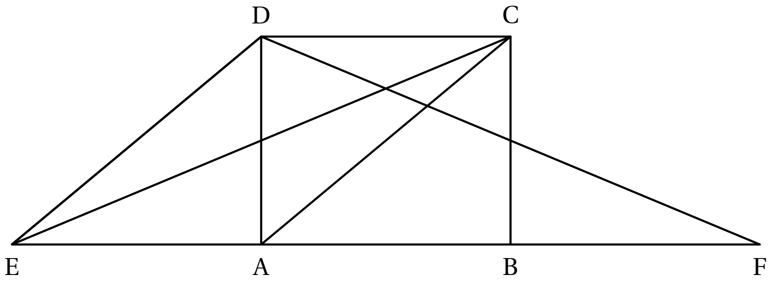
1. Dessiner un graphe représentant cette situation.
2. Montrer qu'il est possible de trouver un trajet empruntant une fois et une seule toutes les rues de ce plan. Justifier. Proposer un tel trajet.
   Est-il possible d'avoir un trajet partant et arrivant du même lieu et passant une fois et une seule par toutes les rues ?
3. Dimitri habite dans cette ville ; le graphe ci-contre donne le **nouveau** plan du quartier avec les sens de circulation dans les différentes rues et le temps de parcours entre les différents lieux.



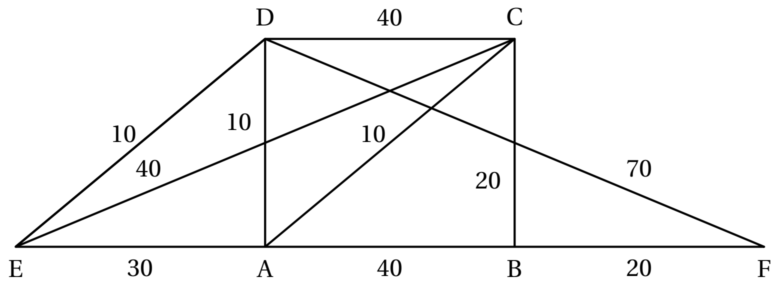
retour au tableau

110. La Réunion 2003

Une grande surface est conçue de telle façon que six secteurs (alimentation, hi-fi, etc.) notés A, B, C, D, E, F sont reliés par des allées selon le graphe ci-dessous.



1. (a) Recopier et compléter le tableau suivant : Secteur A B C D E F Degré
   (b) Le graphe < est connexe. Pourquoi ?
2. Un visiteur désire parcourir l'ensemble des allées en ne passant par cel- les-ci qu'une seule fois.
   (a) Démontrer que son souhait est réalisable.
   (b) Donner un exemple d'un tel parcours.
3. Le directeur désire associer chaque secteur à une couleur de sorte que deux secteurs (sommets) ne portent pas la même couleur.
   (a) Démontrer que le nombre chromatique n du graphe vérifie n ? 4.
   (b) Expliquer pourquoi n 5.
   (c) Proposer un coloriage du graphe permettant de déterminer son nombre chromatique.
4. Une famille se trouve dans le secteur E et doit se rendre dans le secteur E Cela étant, les parents connaissent suffisamment les allées pour savoir que, pour chacune d'elles, les enfants ne résistant pas, il leur faudra débourser une somme (en euros) précisée dans le graphe ci-dessous.

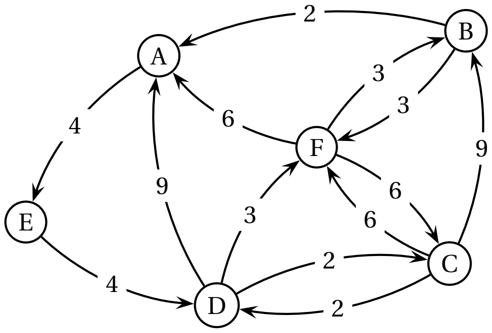


(AB = 40 ; AC = 1O ; AD = 1O ; AE = 30 ; BC = 20 ; BF =20 ; CD = 40 ; CE = 40 ; DE = 10 ; DF = 70)
Indiquer une chaîne qui minimise la dépense de cette famille.

retour au tableau

111. Centre Etrangers 2003

Un livreur d'une société de vente à domicile doit, dans son après-midi, charger son camion à l'entrepôt noté A, livrer cinq clients que nous noterons B, C, D, E et F, puis retourner à l'entrepôt. Le réseau routier, tenant compte des sens de circulation, et les temps de parcours (en minutes) sont indiqués sur le graphe G suivant :



1. Donner la matrice M associée au graphe G en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique.
   On utilisera le modèle suivant :

	A	B	C	D	E	F
A						
B						
C						
D						
E						
F						

2. On donne la matrice M^6 :

$$M^6 = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 6 & 3 & 4 & 6 \\ 19 & 11 & 12 & 9 & 6 & 16 \\ 36 & 28 & 23 & 22 & 18 & 34 \\ 37 & 24 & 25 & 17 & 15 & 31 \\ 15 & 12 & 9 & 10 & 8 & 15 \\ 28 & 22 & 19 & 15 & 15 & 26 \end{pmatrix}$$

   On s'intéresse aux chemins partant de l'entrepôt A et se terminant en A.

   (a) Combien existe-t-il de chemins de longueur 6 reliant A à A ?

   (b) Citer ces chemins.

   (c) Parmi ceux qui passent par tous les sommets du graphe, lequel minimise le temps de parcours ?

   (d) Quelle conséquence peut tirer le livreur du dernier résultat ?

3. Au départ de sa tournée, le livreur a choisi de suivre l'itinéraire le plus rapide. Malheureusement, le client C n'est pas présent au passage du livreur et celui-ci décide de terminer sa livraison par ce client.
   Indiquer quel est le chemin le plus rapide pour revenir à l'entrepôt A à partir de C. La réponse devra être justifiée.

retour au tableau

112. sujet bac 1

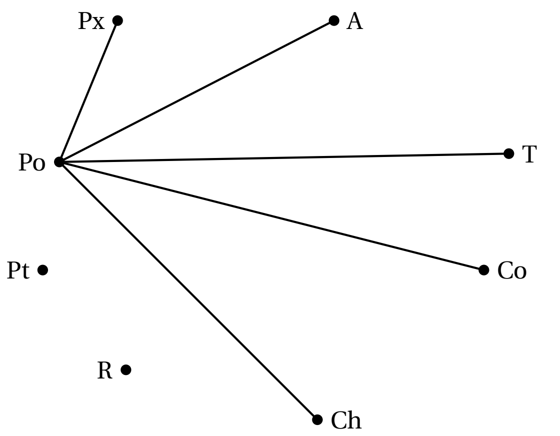
Un jardinier possède un terrain bien ensoleillé avec une partie plus ombragée.
Il décide d'y organiser des parcelles où il plantera 8 variétés de légumes : de l'ail (A), des courges (Co) des choux (Ch), des poireaux (Px), des pois (Po), des pommes de terre (Pt), des radis (R) et des tomates (T).
Il consulte un almanach où figurent des incompatibilités de plantes, données par les deux tableaux :

Expositions incompatibles de plantes	
Plantes d'ombre partielle	Plantes de plein soleil
pois radis	choux tomates courges
Par exemple : les pois sont incompatibles avec les choux, les tomates et les courges	

Associations incompatibles de plantes dans une même parcelle	
pois	ail, poireaux
pommes de terre	courges, radis et tomates
choux	tomates, ail, poireaux et courges
courges	tomates
Par exemple : les pois sont incompatibles avec l'ail et les poireaux	

Pour tenir compte de ces incompatibilités le jardinier décide de modéliser la situation sous la forme d'un graphe de huit sommets, chaque sommet représentant un légume.

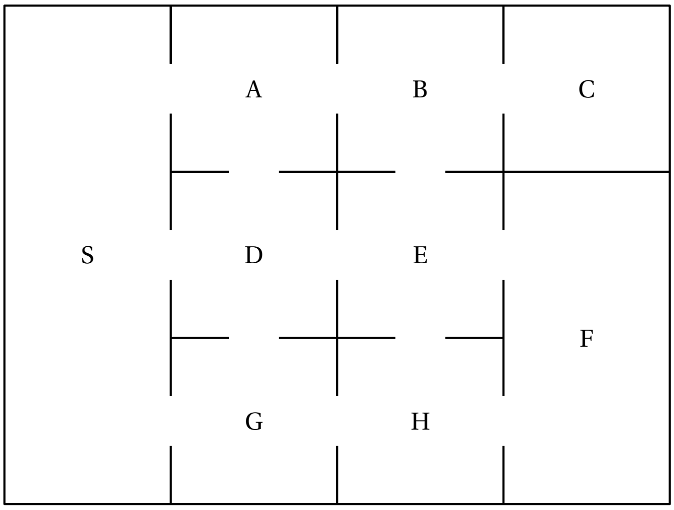
1. Compléter le graphe ci-dessous mettant en évidence les incompatibilités d'exposition ou les associations incompatibles indiquées dans les deux tableaux ci-dessus.
2. Calculer la somme des degrés des sommets du graphe, en déduire le nombre de ses arêtes.
3. Rechercher un sous-graphe complet d'ordre 4, qu'en déduit-on pour le nombre chromatique du graphe ?
4. Donner le nombre chromatique du graphe et l'interpréter en nombre minimum de parcelles que le jardinier devra créer.
5. Donner une répartition des plantes par parcelle de façon à ce que chaque parcelle contienne exactement deux types de plantes et que le nombre de parcelles soit minimum.
6. Donner une répartition des plantes de façon à ce qu'une parcelle contienne trois plantes et que le nombre de parcelles soit minimum.



retour au tableau

113. Antilles juin 2003

I- Un musée est constitué de 9 salles notées A, B, C, D, E, F, G, H et S.
Le plan du musée est représenté ci-dessous :



Ainsi, un visiteur qui se trouve dans la salle S peut atteindre directement les salles A, D ou G. S'il se trouve dans la salle C, il peut se rendre directement dans la salle B, mais pas dans la salle F.
On s'intéresse au parcours d'un visiteur dans ce musée. On ne se préoccupe pas de la manière dont le visiteur accède au musée ni comment il en sort. Cette situation peut être modélisée par un graphe, les sommets étant les noms des salles, les arêtes représentant les portes de communication.

1. Dessiner un graphe modélisant la situation décrite.
2. Est-il possible de visiter le musée, en empruntant chaque porte une fois et une seule ?
   Justifier en utilisant un théorème du cours sur les graphes.
3. Pour rompre une éventuelle monotonie, le conservateur du musée souhaite différencier chaque salle de sa ou des salles voisines (c'est-à-dire accessibles par une porte) par la moquette posée au sol. Quel est le nombre minimum de types de moquettes nécessaires pour répondre à ce souhait ? Justifier.

II - On note M la matrice à 9 lignes et 9 colonnes associée au graphe précédent, en convenant de l'ordre suivant des salles S, A, B, C, D, E, F, G, H. Le graphe n'étant pas orienté, comment cela se traduit-il sur la matrice ?

III - On donne la matrice :

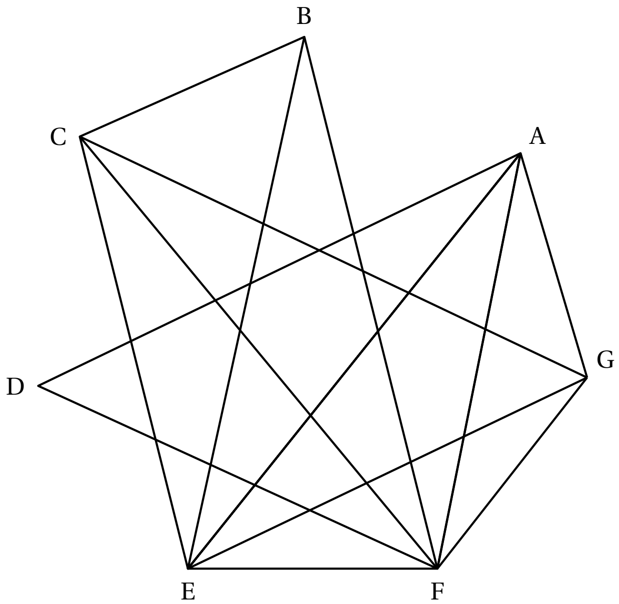
$$M^4 = \begin{pmatrix} 18 & 12 & 11 & 2 & 20 & 12 & 6 & 12 & 12 \\ 12 & 20 & 3 & 6 & 11 & 20 & 5 & 18 & 5 \\ 11 & 3 & 16 & 0 & 19 & 3 & 8 & 4 & 12 \\ 2 & 6 & 0 & 3 & 1 & 7 & 1 & 4 & 1 \\ 20 & 11 & 19 & 1 & 31 & 9 & 11 & 12 & 19 \\ 12 & 20 & 3 & 7 & 9 & 28 & 9 & 20 & 9 \\ 6 & 5 & 8 & 1 & 11 & 9 & 9 & 8 & 9 \\ 12 & 18 & 4 & 4 & 12 & 20 & 8 & 20 & 6 \\ 12 & 5 & 12 & 1 & 19 & 9 & 9 & 6 & 17 \end{pmatrix}$$

1. Combien y-a-t-il de chemins qui en 4 étapes, partent de D et reviennent à D ?
2. Combien y-a-t-il de chemins qui en 4 étapes, partent de S et reviennent à C ? Les citer.
3. Est-il toujours possible de joindre en 4 étapes deux salles quelconques ? Justifier.

retour au tableau

114. Métropole juin2003

Un concert de solidarité est organisé dans une grande salle de spectacle. À ce concert sont conviés sept artistes de renommée internationale Luther Allunison (A), John Biaise (B), Phil Colline (C), Bob Ditlâne (D), Jimi Endisque (E), Robert Fripe (F) et Rory Garaguerre (G). Les différents musiciens invités refusant de jouer avec certains autres, l'organisateur du concert doit prévoir plusieurs parties de spectacle. Les arêtes du graphe Γ ci-dessous indiquent quels sont les musiciens qui refusent de jouer entre eux.



Graphe Γ

1. Déterminer la matrice associée au graphe Γ (les sommets de Γ étant classés dans l'ordre alphabétique).
2. Quelle est la nature du sous-graphe de Γ' constitué des sommets A, E, F et G ?
   Que peut-on en déduire pour le nombre chromatique $\chi(\Gamma)$ du graphe Γ ?
3. Quel est le sommet de plus haut degré de Γ ?
   En déduire un encadrement de $\chi(\Gamma)$.
4. Après avoir classé l'ensemble des sommets de Γ par ordre de degré décroissant, colorier le graphe Γ figurant en annexe.
5. Combien de parties l'organisateur du concert doit-il prévoir ?
   Proposer une répartition des musiciens pour chacune de ces parties.

retour au tableau