Corrigé du baccalauréat Aix-Marseille septembre 1937 par Francois Hache

1. Dans le triangle LMB rectangle en M, on a : $\text{LM} = \text{BM}\tan\widehat{B}$.
   Dans le triangle OMC rectangle en M, on a : $\text{OM} = \text{MC}\tan\widehat{C}$.
   De plus, M est le milieu de [BC] équivaut à $\text{BM} = \text{MC}$.
   O milieu de [LC] $\iff \text{LM} = 2\text{OM} \iff \text{BM}\tan\widehat{B} = 2\text{MC}\tan\widehat{C} \iff \tan\widehat{B} = 2\tan\widehat{C}$
2. On va utiliser les relations trigonométriques suivantes dans un triangle quelconque :
   $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}$ et $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}$ d'une part, et
   $\dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin\widehat{B}} = \dfrac{c}{\sin\widehat{C}}$ d'autre part.

$$\tan\widehat{B} = 2\tan\widehat{C} \iff \frac{\sin\widehat{B}}{\cos\widehat{B}} = 2\frac{\sin\widehat{C}}{\cos\widehat{C}} \iff \frac{\sin\widehat{B}}{\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}} = 2\frac{\sin\widehat{C}}{\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}$$

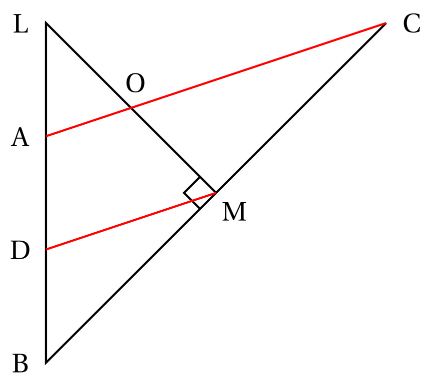
$$\iff \frac{2ac}{a^2+c^2-b^2}\sin\widehat{B} = \frac{4ab}{a^2+b^2-c^2}\sin\widehat{C}$$

$$\iff \frac{2ac\times b}{a^2+c^2-b^2}\,\frac{\sin\widehat{B}}{b} = \frac{4ab\times c}{a^2+b^2-c^2}\,\frac{\sin\widehat{C}}{c}$$

$$\iff \frac{1}{a^2+c^2-b^2} = \frac{2}{a^2+b^2-c^2} \iff a^2+b^2-c^2 = 2a^2+2c^2-2b^2$$

$$\iff 3b^2 = a^2+3c^2$$

3. Dans le triangle ABC, on trace la parallèle à (AC) passant par M ; elle coupe (AB) en D. De plus, M est le milieu de [BC] donc, d'après le théorème de Thalès, D est le milieu de [AB].



Si (ABC) est un triangle (T), alors O est le milieu de [LM]. En se plaçant dans le triangle LDM, on prouve que A est le milieu de [LD]. Donc $\text{LA} = \text{AD} = \text{DB}$.

Il en découle facilement que $\dfrac{\overline{\text{LA}}}{\overline{\text{LB}}} = \dfrac{1}{3}$.

D'après le théorème des milieux, on peut dire que dans le triangle LDM on a : $\text{DM} = 2\text{OA}$, et que dans le triangle ABC, on a : $\text{AC} = 2\text{DM}$. On en déduit que $\text{AC} = 4\text{OA}$, donc que $\text{OC} = 3\text{OA}$.

Il en découle que $\dfrac{\overline{\text{OA}}}{\overline{\text{OC}}} = -\dfrac{1}{3}$.