Durée : 4 heures

Baccalauréat C septembre 1974 Besançon [1]

EXERCICE 1

1. Soit n un entier naturel et P le polynôme

$$x \longmapsto 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

Donner une autre expression de $P(x)$ (sous forme d'une fraction rationnelle), puis dérivant P, une autre expression de

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}.$$

2. Une expérience consiste à lancer vingt fois de suite une pièce de monnaie. À chacun des vingt lancers on note 1 si pile apparaît, 0 si face apparaît. Un résultat d'une telle expérience est donc une suite de vingt nombres dont chacun est égal à 0 ou à 1. On appelle Ω l'ensemble des résultats possibles et on admet que les résultats possibles sont équiprobables.
   a. Quel est le nombre d'éléments de Ω ?
   b. On définit sur Ω la variable aléatoire X, qui, à chaque résultat possible fait correspondre le rang du premier « 1 » dans la suite des vingt nombres correspondants. (au résultat dont tous les termes sont nuls, on fait correspondre 0).
   Définir la loi de probabilité de X.
   Calculer l'espérance mathématique de X, à un millième près.

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\left\{\begin{array}{lclcl} f(x) & = & 1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{si} & x > 0\\ f(x) & = & \mathrm{e}^{x} & \text{si} & x \leqslant 0\end{array}\right.$$

Etudier la continuité et la dérivabilité de cette fonction f sur $\mathbb{R}$.

PROBLÈME

À tout réel t de l'intervalle $\mathrm{I} =]-1~;~1[$ on associe la matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\end{pmatrix}$$

On donne : $\mathcal{V}$ un plan vectoriel euclidien et $\left(\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ une base orthonormée de $\mathcal{V}$, et P un plan affine euclidien associé à $\mathcal{V}$ dont $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ est un repère orthonormé.

Soit F_t l'endomorphisme de $\mathcal{V}$ dont A_t est la matrice dans la base $\left(\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ et f_t l'application affine de P pour laquelle O est invariant et dont F_t est l'endomorphisme associé.

1. Nancy-Reims-Strasbourg

1. Montrer que F_t est un automorphisme de $\mathcal{V}$.

Déterminer l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{u}$ de $\mathcal{V}$ tels que $\overrightarrow{u}$ et $F_t\left(\overrightarrow{u}\right)$ soient liés.

2. **a.** Soit x et y les coordonnées d'un point M de P. Ecrire x_t et y_t coordonnées du transformé M_t de M par f_t.

b. Soit B le point de coordonnées $(1;1)$. Déterminer l'ensemble (D) des transformés de B par toutes les applications f_t ($t \in$ I). (On pourra être amené à étudier l'image de I par l'application $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, dont l'étude se ramène a celle de $t \longmapsto \dfrac{1+t}{1-t}$.

c. Soit C de coordonnées $(0;1)$. Montrer que l'ensemble H des transformés de C par toutes les applications f_t ($t \in$ I) est une branche d'une hyperbole S que l'on précisera.

Représenter (D) et (H) sur le même graphique.

Les questions 3. *et* 4. *sont indépendantes*

3. Dans cette question t désigne un *nombre réel de l'intervalle* $[0;1[$.

On oriente le plan P en choisissant $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath}\right)$ comme repère direct. Soit $\left(\text{O},\,\overrightarrow{\imath'},\,\overrightarrow{\jmath'}\right)$ le repère qui se déduit de $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath}\right)$ par la rotation de centre O et d'angle de détermination $\dfrac{\pi}{4}$.

Soit C_t le transformé de C par f_t (C et C_t appartiennent à H).

a. Déterminer les coordonnées x' et y' de C_t dans le repère $\left(\text{O},\,\overrightarrow{\imath'},\,\overrightarrow{\jmath'}\right)$.

b. Montrer que l'équation de l'hyperbole S dans $\left(\text{O},\,\overrightarrow{\imath'},\,\overrightarrow{\jmath'}\right)$ est $x'y' = \dfrac{1}{2}$.

4. À tout couple $(t\,;\,t')$ de I × I, on fait correspondre le réel :

$$t \star t' = \frac{t+t'}{1+tt'}$$

a. Montrer que : $\forall (t\,;\,t') \in \text{I}\times\text{I}, \quad t\star t' \in \text{I}$.

b. Vérifier que : $\forall (t\,;\,t') \in \text{I}\times\text{I}, \quad A_{t\star t'} = A_t \times A_{t'}$.

c. En déduire que l'ensemble de toutes les matrices A_t ($t \in$ I) muni de la multiplication des matrices, et l'ensemble I muni de la loi $\star$ ont tous deux, une structure de groupe commutatif.