Corrigé de l'exercice 1.

1. Il y a $2 \times 2 \times 3 \times 4 \times 4 = 192$ possibilités.

2. Il y a 2 possibilités à chaque cases et 10 cases, soit $2^{10} = 1\,024$, possibilités.

3. **a.** On obtient les deux personnages de la figure 1.

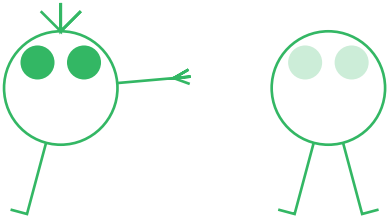


Figure 1

b. Par exemple en changeant, la première ligne de $(0,1)$ en $(1,0)$.

c. Seule la première ligne peut donner des jumeaux de A. Il y a donc $\dfrac{3}{1\,024}$ d'avoir un jumeau de A.

Pour un B, il y a trois possibilités pour la forme, 3 pour les cheveux, et 2 pour les yeux, soit $\dfrac{3 \times 3 \times 2}{1\,024} = \dfrac{18}{1\,024}$.

4. **a.** Non, car les bras et les jambes ne seront pas du même côté.

b.
- X et Y sont ronds, donc il y a au moins un 1. Mais Z est carré, donc ils ont chacun un 0. Z est carré, donc Z hérite des deux 0.
- X et Y sont chauves, donc il y au moins un 0, mais Z est chevelu, donc, ils ont chacun un 1. Z est chevelu, donc Z hérite des deux 1.
- Z a les yeux gris, il a donc un 0 et 1, comme X. Y a deux 1, puisqu'il a les yeux noirs.
- Ils ont un bras, soit un 1 et un 0. Z n'a pas de bras, il hérite donc des deux 0.
- Ils ont une jambe soit un 1 et un 0. Z a deux jambes, il hérite donc des deux 1.

c. X et Y ont comme code génétique forme, l'une des trois possibilités suivantes : $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$. Il y a donc 9 possibilités d'avoir une forme ronde pour X et Y.

Les combinaisons pouvant données des carrés sont :
- $(1,0)$ et $(1,0)$
- $(1,0)$ et $(0,1)$
- $(0,1)$ et $(1,0)$
- $(0,1)$ et $(0,1)$

1	0
1	0
1	0
0	1
0	1
X	

0	1
1	0
1	1
0	1
1	0
Y	

0	0
1	1
0	1
0	0
1	1
Z	

Figure 2

Et sur ces quatre combinaisons, il y a 1/4 d'avoir un carré. Donc la probabilité d'avoir un carré est de :

$$\frac{4}{9} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{9}.$$

Corrigé de l'exercice 2.

1. **a.** $a_4 = 1$, $a_5 = 1$, $a_6 = 2$, $a_7 \geqslant 3$.

b. Pour entourer 4 carrés clairs, on a les cas de la figure 3. Il y a donc au

Figure 3

minimum 8 carrés foncés qui encadrent 4 carrés clairs.
Comme $a_8 \geqslant 4$, on en déduit que $a_7 < 4$

2. **a.** La figure 4 donne les transformations qui permettent de gagner un clair sans changer le nombre de foncés.

b. La figure 5 donne les différents cas possibles, en considérant que les motifs sont contigües. Il faut probablement comprendre que les deux motifs sont contigües. On retrouve bien les motifs a, b, c, d et e.

c. On obtient la figure 6. Les cases marquées d'une croix blanche ont été déplacées vers le vas d'une case. Il y a toujours 14 cases foncées, mais il y a maintenant 18 cases claires contre 16 auparavant. La figure **??** permet d'affirmer que toutes les figures ayants deux carrés foncés accolés horizontalement, ne peuvent pas être modifiés.

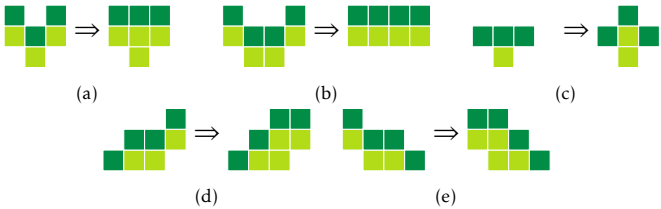
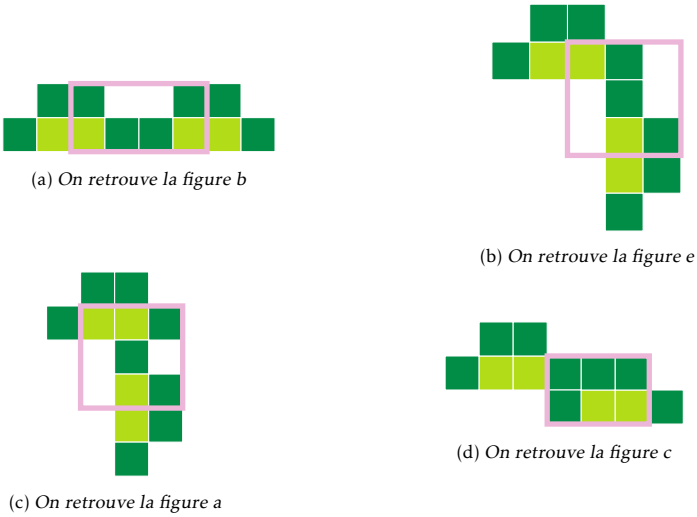


Figure 4


(a) *On retrouve la figure b*

(b) *On retrouve la figure e*

(c) *On retrouve la figure a*

(d) *On retrouve la figure c*

Figure 5

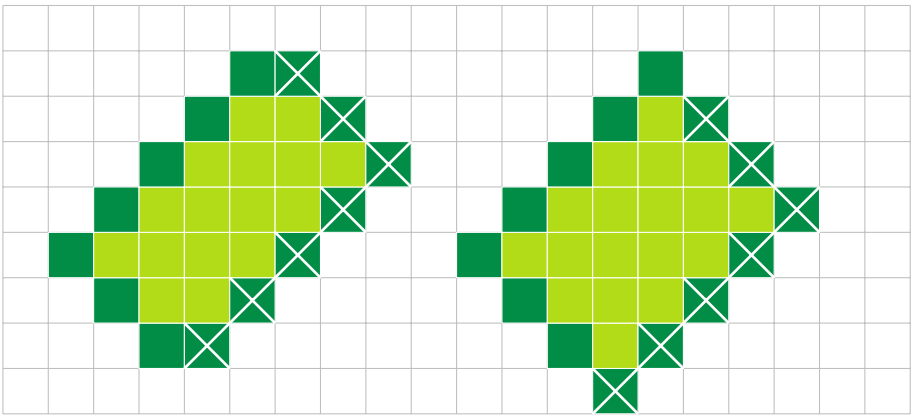


Figure 6

3. **a.** Pour $C_1(a,b)$, les carrés de côtés ont une diagonale de $\sqrt{2}$. Il y a $a-2$ carrés complets. Il y a une demi-diagonale dans chaque sommet.

On en déduit qu'il y a $a+1$ carrés dans le côté longueur $a\sqrt{2}$, et $b+1$ carrés dans le côté de longueur $b\sqrt{2}$. Mais les sommets sont comptés deux fois. Au final, il y a $2(a+1)+2(b+1)-4 = 2a+2b$.

Dans l'exemple donné, $a = 6$ et $b = 3$.

Pour les carrés clairs il y a b rangées de a carrés et $b-1$ rangées de $a-1$, donc au total $ab+(a-1)(b-1)$.

b. On décale la rangée supérieure de $C_2(a,b)$ de un carreau vers le bas, et on retrouve $C_1(a,b)$. On supprime alors un carré foncé (le carré en bas de l'alignement vertical).

On en déduit que $n = 2a+2b+1$.

En passant de $C_2(a,b)$ à $C_1(a,b)$ on a supprimé une une rangé de $b-1$ carrés clairs. Donc, $q = ab+(a-1)(b-1)-b-1 = ab+a(b-1) = a(2b-1) = a(n-2a-2)$.

4. $n = 2019$, on cherche donc a tel que $q = a(2107-2a)$ soit maximum.

C'est un polynôme du deuxième degré donc, le maximum est atteint pour $a = \dfrac{2017}{4} = 504,25$. Donc le maximum est atteint pour $a = 504$, qui est l'entier le plus proche de $504,25$.

$q = 504(2107-2\times 504) = 508\,536$ carrés clairs.

Corrigé de l'exercice 3.

Partie A

1. On obtient le tableau 1 La dernière ligne est remplie avec les nombres impairs.

Nombre de points sur un côté	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de points total	1	4	9	16	25	36	49
Nombre de points rajoutés		3	5	7	9	11	13

Table 1

2. a. $(n+1)^2-n^2 = n^2+2n+1-n^2 = 2n+1$.

b. On cherche n tel que $(n+1)^2-n^2 = 2n+1 = 49$. Donc $n = 25$.

On a donc le triplet pythagoricien $(7\,;24\,;25)$.

c. On cherche p tel que $2p+1 = 35^2$, soit $p = \dfrac{35^2-1}{2} = 612$.

Le triplet cherché est donc $(35\,;612\,;613)$.

3. a. Soit $a = 2k+1$ un nombre entier impair. Considérons n tel que $2n+1 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1$, soit $n = 2k^2+2k$ Alors $\left(2k+1\,;2k^2+2k\,;2k^2+2k+1\right)$ est un triplet pythagoricien comportant deux entiers consécutifs.

b. On a l'algorithme suivant :

Partie B

Données : Saisir n
$k \leftarrow (n-1)/2$
$(2k+1, 2k^2+2k, 2k^2+2k+1)$

1. **a.** Le côté du grand carré mesure $x+y$ de côté. Le côté du carré grisé mesure $y-x$. On en déduit que :

$$(x+y)^2 = 4xy + (y-x)^2.$$

b. Si x et y sont des carrés parfaits alors, comme 4 est un carré parfait, $4xy$ est aussi un carré parfait.

c. Si x et y sont des carrés parfaits, alors le triplet $\left(\sqrt{4xy}\,;\, y-x\,;\, x+y\right)$ est un triplet pythagoricien.

2.
- $x = 1$ et $y = 4$ sont deux carrés parfait. $4xy = 16 = 4^2$. On a donc comme triplets $(3\,;4\,;5)$.
- $x = 4$ et $y = 9$, $4xy = 12^2$, $y - x = 5$ et $y + x = 13$. $(5\,;12\,;13)$ est un triplet pythagoricien.
- $x = 9$ et $y = 16$, $4xy = 24^2$, $y - x = 7$ et $y + x = 25$. $(7\,;24\,;25)$ est un triplet pythagoricien.
- $x = 16$ et $y = 25$, $4xy = 40^2$, $y - x = 9$ et $y + x = 41$. $(9\,;40\,;41)$ est un triplet pythaoricien.