Btn 1995

Exercice 1 (8 points)

Un sac contient 5 jetons :

- Un jeton bleu valant 3 points,
- deux jetons rouges valant chacun 2 points,
- deux jetons verts valant chacun 1 point.

1) On tire un jeton au hasard, quelle est la probabilité de tirer un jeton rouge ?
2) On tire un jeton au hasard, quelle est la probabilité d'obtenir au moins deux points ?
3) On tire un jeton, puis un deuxième sans remettre le premier jeton dans le sac.
   a. Faire un tableau indiquant tous les tirages possibles et faisant apparaître les couleurs obtenues et la somme des points obtenue.
   b. Calculer la probabilité de l'évènement A : « Tirer deux jetons de couleurs différentes ».
   c. Calculer la probabilité de l'évènement B : « Obtenir 4 points ».
   d. Calculer la probabilité de l'évènement C : « Obtenir 4 points avec deux jetons de couleurs différentes ».
   e. Calculer la probabilité de l'évènement D : « Obtenir au moins 4 points ».

Pour voir le corrigé de l'exercice 1. cliquez sur le lien : Corrigé exercice 1

Exercice 2 (12 points)

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $\mathbf{I} = [\,1\,;\,6\,]$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{4} - 1 - 2\ln x$$

et sa courbe représentative C_f dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1. Déterminer la dérivée f' de la fonction f et vérifier que sur l'intervalle $\mathbf{I}$ on a :

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4}{2x}.$$

2. Étudier sur $\mathbf{I}$ le signe de $f'(x)$ et établir le tableau de variations de la fonction f.

3. Tracer la courbe C_f sur $\mathbf{I}$.

4. Soit g la fonction définie sur $\mathbf{I}$ par :

$$g(x) = x\ln x - x$$

   a. Déterminer la fonction g' dérivée de la fonction g.
   b. En déduire la primitive F de la fonction f telle que : $F(1) = 0$.

Pour voir le corrigé de l'exercice 2. cliquez sur le lien : Corrigé exercice 2

Corrigé Btn 1995

Exercice 1

1. $P(R) = \dfrac{2}{5} = 0,4$.
2. Si on note p cette probabilité, $p = \dfrac{3}{5} = 0,6$.
3. a. On peut construire le tableau :

1er tirage / 2ème tirage	B_3	R_2	R_2	V_1	V_1
B_3		RB_5	RB_5	VB_4	VB_4
R_2	BR_5		RR_4	VR_3	VR_3
R_2	BR_5	RR_4		VR_3	VR_3
V_1	BV_4	RV_3	RV_3		VV_2
V_1	BV_4	RV_3	RV_3	VV_2	

Il y a 20 tirages posibles.

b. $P(A) = \dfrac{16}{20} = 0,8$.

c. $P(B) = \dfrac{6}{20} = 0,3$.

d. $P(C) = \dfrac{4}{20} = 0,2$.

e. $P(D) = \dfrac{10}{20} = 0,5$.

Exercice 2

1. On a : $f'(x) = \dfrac{2x}{4} - 2 \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{x}{2} - \dfrac{2}{x} = \dfrac{x^2-4}{2x}$

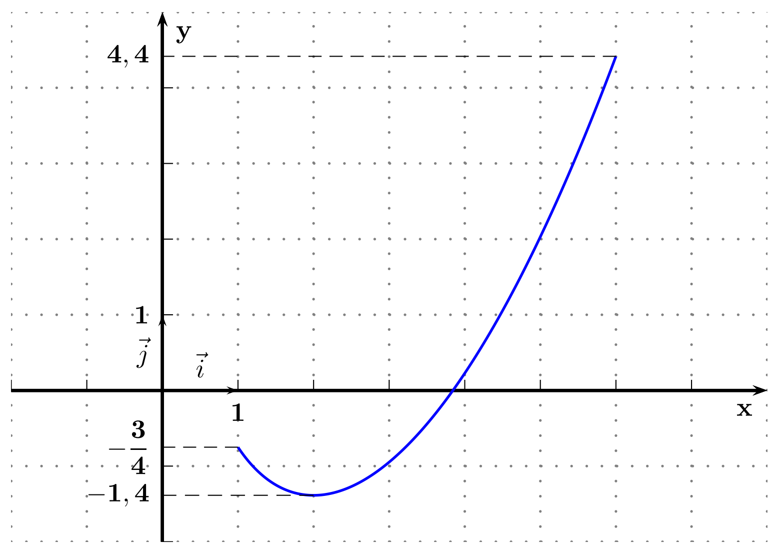
2.

$$f'(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{2x}$$

Cette expression est du signe de $(x-2)$ sur l'intervalle **I**. $(x+2)$ et $2x$ sont strictement positifs pour tout réel $x \in$ **I**.
On obtient donc le tableau :

x	1		2		6
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\frac{3}{4} = -0,75$	↘	$-2\ln 2 \approx -1,4$	↗	$8-2\ln 6 \approx 4,4$

3. On obtient la courbe C_f :



4. **a.** $g'(x) = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x$. On remarque que g est une primitive de la fonction ln.

b. Les primitives de la fonction f s'écrivent donc :

$$F(x) = \frac{1}{3} \times \frac{x^3}{4} - x - 2\left(x \ln x - x\right) + k = \frac{1}{12}x^3 + x - 2x\ln x + k,$$

d'après la question précédente.
En utilisant $F(1) = 0$, on obtient : $F(1) = \dfrac{1}{12} + 1 + k = 0$. Soit : $k = -\dfrac{13}{12}$. Et la primitive demandée s'écrit :

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{12}x^3 + x - 2x\ln x - \frac{13}{12}}$$