Btn 1997

Exercice 1 (10 points)

1. **a.** Dans un repère orthonormé où 1 cm représente 50 unités, construire (on se limitera aux points d'abscisses positives) les droites D_1 , D_2 et D_3 d'équations respectives :

$$x + y = 500$$

$$x + 2y = 750$$

$$x + 1,5y = 600$$

   b. Déterminer par un calcul les coordonnées du point d'intersection I des droites D_1 et D_3.

2. Un service de restauration rapide propose deux types de sandwiches au fromage :
   - le **mini** composé de : 1 pain rond, 40 g de steak hache et 1 tranche de fromage de 20 g,
   - le **maxi** composé de 1 pain rond, 60 g de steak haché et 2 tranches de fromage de 20 g chacune.

   On note x le nombre de mini sandwiches et y celui de maxi sandwiches vendus par jour.

3. **a.** Exprimer à l'aide d'inégalités la contrainte suivante :
   on dispose chaque jour au maximum de 500 pains, de 24 kg de steak et de 15 kg de fromage.

   b. Déterminer graphiquement l'ensemble des points vérifiant ces inégalités. Justifier la démarche.

   c. Peut-on vendre chaque jour :
   - 350 mini sandwiches et 125 maxi ?
   - 300 mini sandwiches et 200 maxi ?
   - 250 mini sandwiches et 250 maxi ?

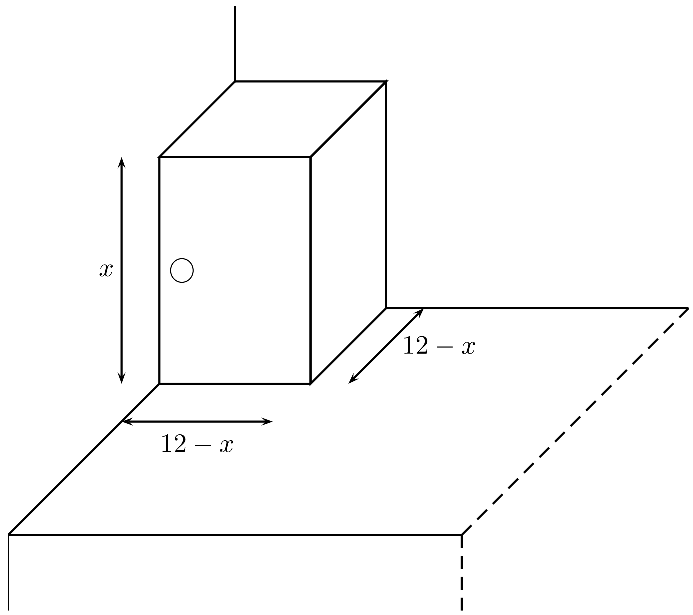
   d. On réalise un bénéfice de 6 F sur un mini sandwich et de 8 F sur la vente d'un maxi. Exprimer en fonction de x et de y le bénéfice total réalisé par jour $B(x, y)$.

   e. Représenter les droites correspondant respectivement à un bénéfice de : 2 400 F ; 3 400 F ; 3 600 F.
   En déduire en justifiant le nombre de mini sandwiches et de maxi sandwiches à vendre par jour pour obtenir un bénéfice maximal que l'on calculera.

Pour voir le corrigé de l'exercice 1. cliquez sur le lien : Corrigé exercice 1

Exercice 2 (10 points)

On veut réaliser dans l'angle d'un plan de travail un rangement ayant la forme d'un parallélépipède droit selon le plan ci-dessous où les longueurs sont en dm.



1. Justifier que l'expression du volume du rangement est :

$$f(x) = x^3 - 24x^2 + 144x.$$

   Quel est l'intervalle dans lequel on doit prendre les valeurs de x ?

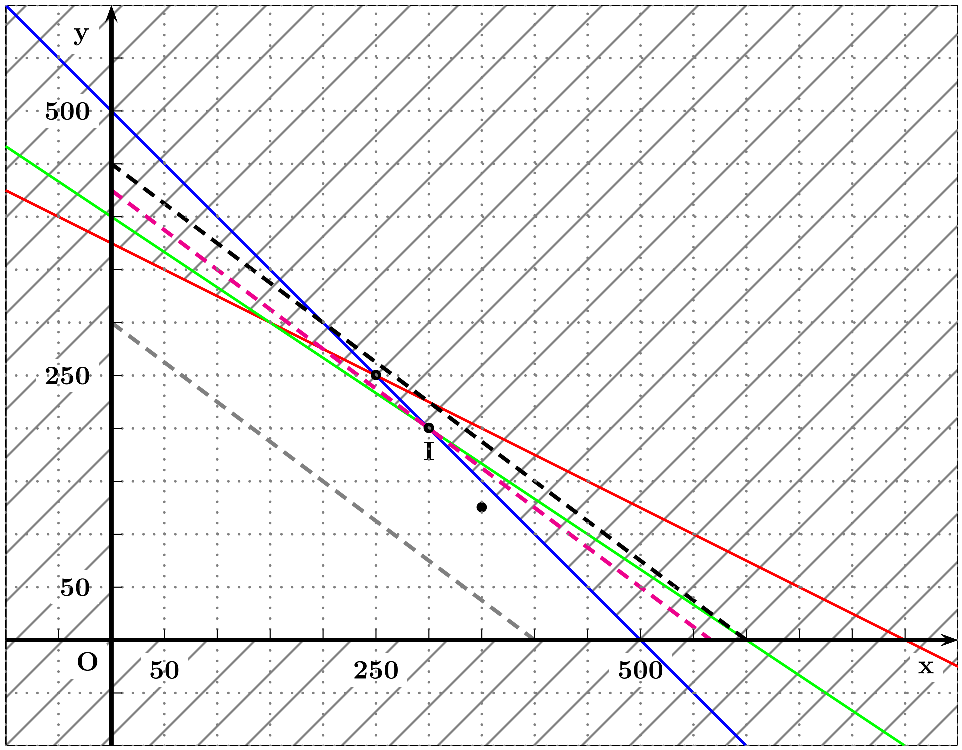
2. Étudier la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 24x^2 + 144x$ sur l'intervalle $[0\,;\,12]$. On étudiera la dérivée, les variations et on donnera une table numérique.
3. Tracer la courbe représentative C_f
4. Quelle est la tangente au point **A** d'abscisse $x_0 = 8$? Tracer cette tangente en indiquant les points utilisés.
5. À l'aide de l'étude de f , déterminer en cm la valeur de x pour laquelle le rangement a un volume maximal. Quel est ce volume maximal en cm^3 ?
6. En traçant les pointillés utiles, indiquer pour quelles valeurs de x le rangement a un volume de 180 dm^3. Donner les lectures graphiques à 10^{-1} près.

Pour voir le corrigé de l'exercice 2. cliquez sur le lien : Corrigé exercice 2

Corrigé Btn 1997

Exercice 1

1. **a.** Représentation graphique de l'exercice :



2. On résoud :

$$(S) \quad \begin{cases} x + y = 500 & (L_1) \\ x + 1,5y = 600 & (L_2) \end{cases}$$

Par soustraction $L_2 - L_1$ on obtient presque directement la solution : $S = \{(\ 300\ ;\ 200\ )\}$.

3. **a.** On obtient :

$$(S) \quad \begin{cases} x + y \leqslant 500 \\ 40x + 60y \leqslant 24000 \\ 20x + 40y \leqslant 15000 \end{cases}$$

On simplifie :

$$(S) \quad \begin{cases} x + y \leqslant 500 \\ x + 1,5y \leqslant 600 \\ x + 2y \leqslant 750 \end{cases}$$

b. La démarche du cours conduit à hachurer « au dessus des droites ».

c. On place les points $(350\ ;\ 125)$; $(300\ ;\ 200)$ et $(250\ ;\ 250)$. Les réponses sont donc : oui, oui et non.

d. $B(x,\ y) = 6x + 8y$

e. La droite $6x + 8y = 2\,400$ passe par :$(0\ ;\ 300)$ et $(400\ ;\ 0)$.
La droite $6x + 8y = 3\,400$ passe par $(300\ ;\ 200)$ et $(0 \ldots ; \ldots 425)$.
La droite $6x + 8y = 3\,600$ passe par $(600, 0)$ et $(200\ ;\ 300)$.
Ces trois droites sont parallèles. Un bénéfice de 2 400 F est possible et un bénéfice de 3 400 F aussi (au point I). Un bénéfice de 3 600 F ne l'est pas (dans la zone hachurée). Le graphique montre que le maximum est obtenu au point I, soit $x = 300$ et $y = 200$ pour un bénéfice maximal de 3 400 F.

Exercice 2

1. Le volume du rangement est : $(12-x)\times(12-x)\times x = x\,(12-x)^2 = x\left(144-24x+x^2\right) = x^3-24x^2+144x$ c'est bien l'expression $f(x)$.

2. • $f'(x) = 3x^2-48x+144 = 3(x^2-16x-48)$; le trinôme $(x^2-16x+48)$ a deux racines : $\Delta = 64$ et $x_1 = 4$; $x_2 = 12$.

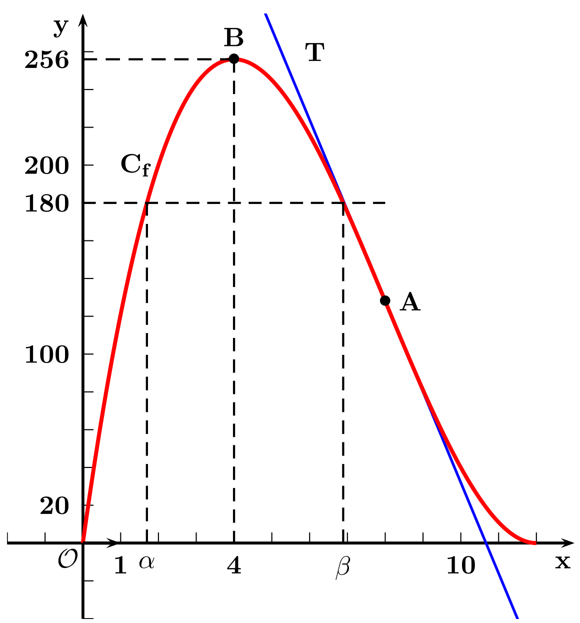
• Il se factorise : $3(x^2-16x-48) = 3(x-4)(x-12)$.
On peut utiliser les résultats du **Chapitre 4.** ou construire le tableau de signes du produit : $(x-4)(x-12)$.

On obtient le tableau de variations suivant et la table numérique sur $[\,0\,;\,12\,]$:

x	0		4		12
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	256 *max*	$\searrow$	0

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x)$	0	121	200	243	256	245	216	175	128	81	40	11	0

3. Courbe et tangente :



Équation de la tangente au point **A** d'abscisse 8 :

$$y = f'(8)\times(x-8)+f(8)$$

avec : $f'(8) = -48$ et $f(8) = 128$ ce qui donne :

$$\boxed{y = -48x+512}$$

T est tracée avec $(8\ ;\ 128)$ et $(10\ ;\ 32)$.

4. L'étude des variations de f montre que f présente sur l'intervalle un maximum pour $x = 4$ soit $f(4) = 256$. **En cm** : une valeur de 40 cm soit un volume : $V = 256\,000$ cm^3. Ce qui s'obtient aussi par : $V = 40\times 80\times 80 = 256\,000$ cm^3.

5. Les pointillés tracés montrent que les valeurs de la variable x donnant un volume de 180 dm^3 sont : $\alpha \approx 1,7$ dm et $\beta \approx 6,9$ dm.