Btn 1998

Exercice 1 (8 points)

1. Un menu proposé par un restaurant comporte une entrée, un plat et un dessert. Les clients ont le choix entre deux entrées, trois plats et deux desserts. Combien de menus différents peut-on constituer ?

2. Les clients peuvent, s'ils le désirent, prendre seulement un plat et un dessert notés P_1, P_2, P_3, D_1 et D_2.

a. On a constaté que :

- 30 % des clients ont choisi P_2,
- 40 % des clients ont choisi D_2 et parmi eux, 25 % ont choisi P_2.

Recopier et compléter :

	D_1	D_2	Total
P_1	14		20
P_2			
P_3			
Total			100

b. On considère au hasard un client. Déterminer les probabilités des événements suivants :
A : le client a choisi P_2 ;
B : le client a choisi D_1 ;
C : le client a choisi P_3 et D_1 ;
D : le client a choisi P_1 ou P_2 ;
E : le client a choisi P_3 ou D_2.

c. Définir par une phrase les événements : $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A}$ et $\overline{A \cup B}$ puis déterminer la probabilité de chacun de ces événements.

d. On considère au hasard un client qui a choisi P_2. Quelle est la probabilité de l'événement F : le client a choisi D_2 ?

Pour voir le corrigé de l'exercice 1. cliquez sur le lien : Corrigé exercice 1

Exercice 2 (12 points)

1. Soit f la fonction définie sur $]\,0\;;\;+\infty\,[$ par :

$$f(x) = x - 100 + \frac{6400}{x}$$

a. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$ puis sa limite en 0.

b. Calculer la dérivée f' de f et montrer qu'elle peut s'écrire :

$$f'(x) = \frac{x^2 - 6400}{x^2}$$

c. Etudier sur $]\,0\;;\;+\infty\,[$ le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau des variations de f.

d. Montrer que sur $]\,0\;;\;+\infty\,[$, la fonction F définie par $F(x) = \dfrac{x^2}{2} - 100x + 6400\ln x$ est une primitive de la fonction f.

e. Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal pour $x \in [\,40\,;\,160\,]$. On prendra 1 cm pour 10 unités sur les deux axes.

2. Le coût, exprimé en F, de x repas préparés, par service, dans un restaurant peut s'écrire pour $x \in [\,40\,;\,160\,]$:

$$C(x) = x^2 - 100x + 6400$$

a. Recopier et compléter le tableau :

Nombre de repas	40	50	100
Coût de x repas			
Coût moyen d'un repas			

b. Ecrire le coût moyen d'un repas en fonction du nombre x de repas préparés. On notera ce coût moyen unitaire $C_m(x)$.

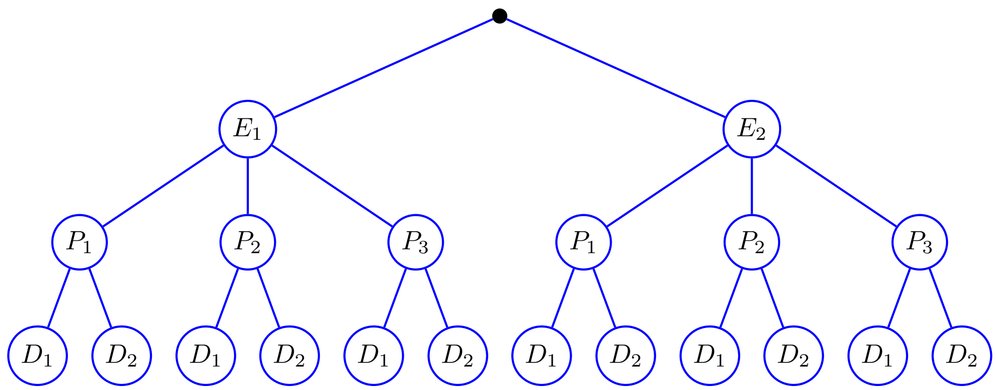
c. Déduire de la première question le nombre de repas que ce restaurant doit servir pour que le coût moyen d'un repas soit minimal.

d. Trouver, à l'aide du graphique, à quel intervalle doit appartenir x pour que le coût moyen unitaire soit inférieur ou égal à 90 F. Mettre la répose en évidence sur le graphique à l'aide de pointillés.

Pour voir le corrigé de l'exercice 2. cliquez sur le lien : Corrigé exercice 2

Corrigé Btn 1998

Exercice 1



1. L'arbre ci-dessus montre qu'il y a $2 \times 3 \times 2 = 12$ menus différents possibles.

2. On obtient :

	D_1	D_2	Total
P_1	14	6	20
P_2	20	10	30
P_3	26	24	50
Total	60	40	100

3. $\mathrm{P(A)} = \dfrac{30}{100} = 0,3$; $\mathrm{P(B)} = \dfrac{60}{100} = 0,6$; $\mathrm{P(C)} = \dfrac{26}{100} = 0,26$; $\mathrm{P(D)} = \dfrac{50}{100} = 0,5$; $\mathrm{P(E)} = \dfrac{66}{100} = 0,66$.

4. Voir les définitions du cours : $\mathrm{P(A{\cup}B)} = \dfrac{70}{100} = 0,7$; $\mathrm{P(A{\cap}B)} = \dfrac{20}{100} = 0,2$; $\mathrm{P(\overline{A})} = 1 - 0,3 = 0,7$; $\mathrm{P(\overline{A \cup B})} = 1 - 0,7 = 0,3$.

5. $\mathrm{P(F)} = \dfrac{10}{30} = \dfrac{1}{3}$.

Exercice 2

1. **a.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; en effet : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-100) = +\infty$ et : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6400}{x} = 0$.

$\lim\limits_{x\to0} f(x) = +\infty$; en effet : $\lim\limits_{x\to+0}(x-100) = 0$ et : $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{6400}{x} = +\infty$.

b.

$$f'(x) = 1 - \frac{6400}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} - \frac{6400}{x^2} = \frac{x^2-6400}{x^2}$$

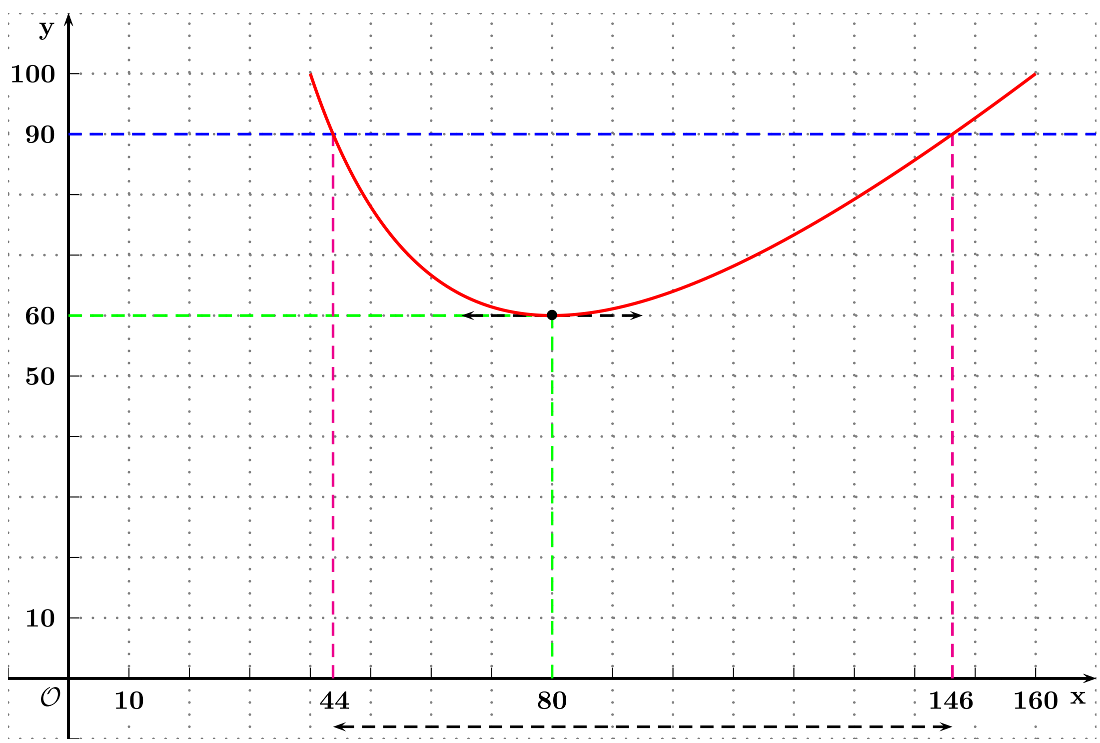
c. On obtient donc le tableau :

x	0		80		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	60	↗	$+\infty$

d.

$$F'(x) = x - 100 + 6400 \times \frac{1}{x} = x - 100 + \frac{6400}{x} = f(x)$$

e. Représentation graphique :



2. **a.** On obtient aisément :

Nombre de repas	40	50	100
Coût de x repas	4000	3900	6400
Coût moyen d'un repas	100	78	80

b.

$$C_m(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{x^2 - 100x + 6400}{x} = x - 100 + \frac{6400}{x} = f(x)$$

c. En utilisant la courbe ou le tableau de variations, on observe que le coût moyen est minimal pour **80 repas** servis et vaut : $C_m(80) = f(80) = 60$ F.

d. On trace la droite $y = 90$ (voir graphique) et les pointillés montrent que l'intervalle de rentabilité est environ : $[\ 44\ ;\ 146\ ]$.