Btn 1999

Exercice 1 (9 points)

Une enquête d'un service commercial a permis de connaître l'évolution de la demande de déjeuners en fonction du prix proposé dans un restaurant :

N de la donnée	Prix proposé p_i	Demande hebdomadaire d_i
1	70	520
2	90	433
3	110	325
4	130	169
5	150	110
6	170	45

1. Représenter graphiquement cette distribution dans un repère orthogonal.

2. Peut-on envisager un ajustement affine ?

3. On utilise la méthode des points moyens :

  a. Calculer les coordonnées des points moyens G_1 et G_2. Tracer la droite (G_1G_2).

  b. Déterminer une équation de cette droite.

4. On suppose désormais que la demande d en fonction du prix p est définie par $d(p) = -5,3\ p\ +\ 903$ pour p compris entre 70 et 170.

  a. Déterminer la recette $R(p)$ en fonction de p.

  b. Déterminer le prix du repas (arrondi à l'unité) qui donne la recette maximum. Pour cela on pourra chercher quelle valeur de p annulle la dérivée R' de la fonction recette R.

Pour voir le corrigé de l'exercice 1. cliquez sur le lien : Corrigé exercice 1

Exercice 2 (11 points)

Partie A

Le gérant du restaurant fixe finalement le prix du repas à 85 F. La recette hebdomadaire est alors en centaines de F : $R(n) = 0,85\ n$ où n est le nombre de clients par semaine.
Il prévoit que son coût de production hebdomadaire exprimé en centaines de F, est fonction du nombre n de clients et est donné par :

$$C(n) = 40 + 7\ln(n+1).$$

1. Montrer que la fonction C définie par $C(x) = 40 + 7\ln(x+1)$ est croissante sur $[0\ ;\ 150]$.

2. Représenter graphiquement la fonction C dans un repère orthogonal. Unités graphiques : 1 cm pour 10 unités sur chaque axe.

3. Tracer dans le même graphique la droite d'équation $y = 0,85\ x$.

4. Déterminer à l'aide du graphique le nombre de repas à partir duquel le gérant réalise un bénéfice.

Partie B

Le gérant souhaite investir pour l'achat de matériel de cuisine une somme S amortissable sur 7 ans. Les amortissements forment une suite géométrique de raison $0,8$.

1. Soit u_0 le premier amortissement. Exprimer les amortissements u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 et u_6 en fonction de u_0.
2. Exprimer la somme S en fonction de u_0.
3. Sachant que cette somme provient d'un placement financier sur 5 ans d'un montant de 269 000 F à 6 % à intérêts composés, quelle est cette somme ?
4. Calculer alors le montant du premier amortissement u_0, puis des 6 suivants (arrondir au F près).

Remarque : le capital C_n obtenu par placement de C_0 sur n années au taux $t\,\%$ à intérêts composés est donné par :

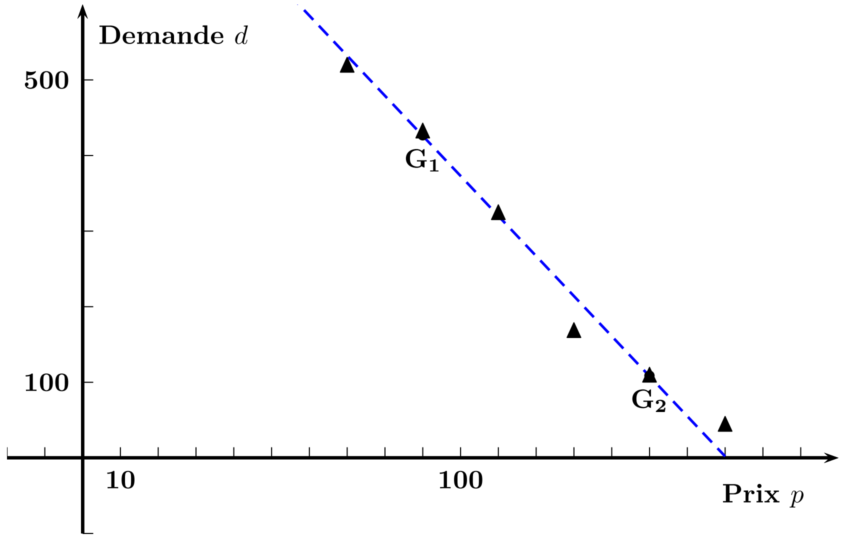
$$C_n = C_0\left(1+\frac{t}{100}\right)^n.$$

Pour voir le corrigé de l'exercice 2. cliquez sur le lien : Corrigé exercice 2

Corrigé Btn 1999

Exercice 1

1. Représentation graphique :



2. La forme du nuage permet d'envisager un ajustement affine.

3. **a.** G_1 $(90; 426)$ et G_2 $(150; 108)$.

b.

$$d = ap + b$$

$$a = \frac{108 - 426}{150 - 90} = -5,3$$

$$d = -5,3p + b$$

$$426 = -5,3 \times 90 + b$$

$$b = 426 + 477 = 903$$

$$\boxed{d = -5,3p + 903}$$

4.

$$R(p) = p \times d(p) = p(-5,3p + 903) = -5,3p^2 + 903p$$

5. R est une fonction du second degré :

$$R'(p) = -10,6p + 903$$

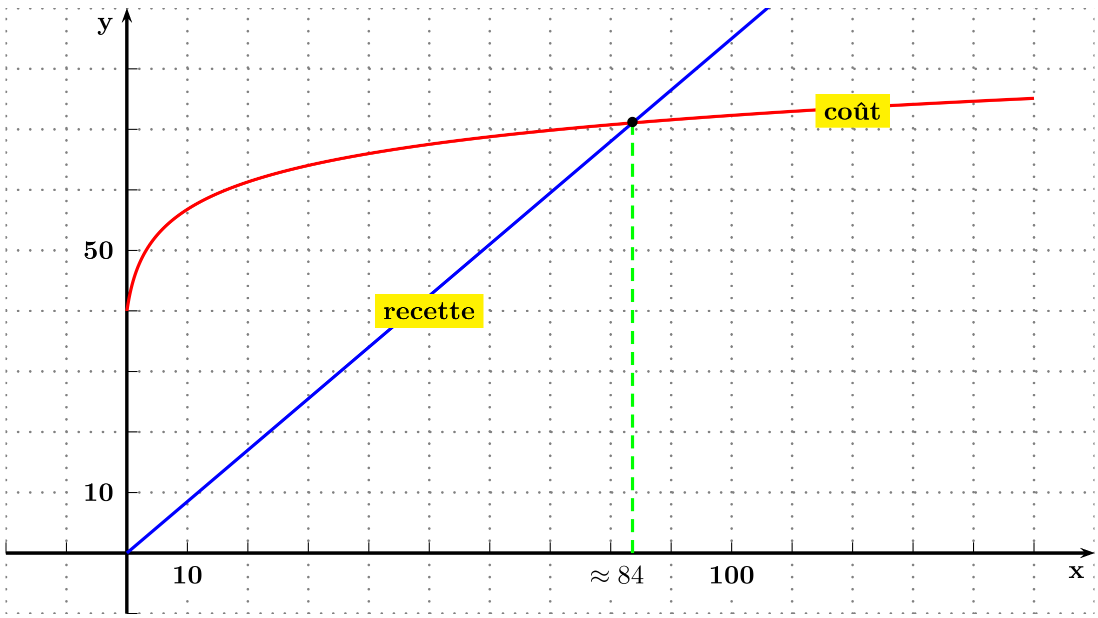
La dérivée R' de R est successivement positive puis négative (à cause de $-10,6$), elle est nulle si $p = \dfrac{903}{10,6} \approx 85$.

Le prix qui donne une recette maximum est donc :85 F.

Exercice 2

Partie A

1. On calcule la dérivée : $C'(x) = 7 \times \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{7}{x+1}$. Elle est clairement positive sur l'intervalle et C est donc croissante.
2. Représentation graphique :



3. On trace la droite $y = 0,85\ x$ avec l'origine et $(100; 85)$.
4. Ce nombre n est tel que :$R(n) \geqslant C(n)$. On l'obtient graphiquement : $n \approx 84$

Partie B

Toutes les sommes sont en francs.

1. On a de façon claire : $u_1 = O,8\ u_0$; $u_2 = 0,8^2\ u_0$; $u_3 = 0,8^3\ u_0$; $u_4 = 0,8^4\ u_0$; $u_5 = 0,8^5\ u_0$ et $u_6 = 0,8^6\ u_0$.
2. $$S = u_O + u_1 + \cdots\cdots + u_6 = u_0 \times \frac{1-0,8^7}{1-0,8} \approx 3,951\ u_0$$
3. $$S = C_0 \times 1,06^5 = 269\,000 \times 1,06^5 \approx 359\,983.$$
4. On en déduit que : $u_0 = \dfrac{359\,983}{3,951} \approx 91\ 112$ puis les autres en multipliant successivement par $0,8$. $u_1 \approx 72\,890$; $u_2 \approx 58\,312$; $u_3 \approx 46\,649$; $u_4 \approx 37\,319$; $u_5 \approx 29\,856$ et $u_6 \approx 23\,884$.