Btn 2001

Exercice 1 (10 points)

Une culture microbienne est soumise à une température constante de 90 C. On étudie l'évolution du nombre N de cellules microbiennes en fonction du temps t écoulé depuis le début de l'expérience. Les résultats des six premières mesures sont consignées dans le tableau où i désigne le numéro de la mesure.

i	1	2	3	4	5	6
t_i en minutes	0	5	10	15	20	25
N_i	328 000	180 000	73 000	40 000	18 000	11 000

1. On pose : $y_i = \ln N_i$.
   Reproduire et compléter le tableau ci-dessous en donnant les valeurs à 10^{-1} près.

t_i en minutes	0	5	10	15	20	25
$y_i = \ln N_i$						

2. Construire dans un repère orthogonal, le nuage des points de coordonnées $(t_i ; y_i)$. On prendra 2 cm pour 5 minutes sur l'axe des abscisses et 1 cm pour une unité sur l'axe des ordonnées.
3. Déterminer les coordonnées du point moyen G_1 des trois premiers points du nuage, puis les coordonnées du point G_2 des trois derniers points du nuage. Placer ces points et tracer la droite $(G_1\,G_2)$.
4. Déterminer une équation de la droite $(G_1\,G_2)$ sous la forme $y = at + b$, les coefficients étant calculés à 10^{-2} près.
5. **a.** Quelle est l'ordonnée du point de la droite $(G_1\,G_2)$ ayant pour abscisse 40.
   b. En supposant que l'ajustement du nuage par la droite $(G_1\,G_2)$ permet de formuler des prévisions, estimer le nombre de cellules microbiennes présentes dans la culture 40 minutes après le début de l'expérience. Justifier la démarche et donner le résultat à la centaine près la plus proche.
6. Déterminer, en supposant que l'ajustement est utilisable, le temps nécessaire pour que la culture ne contienne plus de cellule microbienne : on estime que ce temps est obtenu dès que le nombre de cellules est inférieur à 100.

Pour voir le corrigé de l'exercice 1. cliquez sur le lien : Corrigé exercice 1

Exercice 2 (10 points)

Étude fonctionnelle

Remarque : en 2001, sujet élaboré en 2000, les prix sont encore en Francs !

1. Étude de la fonction C pour x réel dans l'intervalle $[0\ ;\ 120]$:
   Un traiteur propose des menus au prix unitaire de $80\,F$. Leur coût total de fabrication s'exprime en fonction du nombre x de repas fabriqués par :
   $$C(x) = 0,5\,x^2 + 20x + 550$$
   où x est assimilé à un réel tel que : $x \leqslant 120$
   Calculer $C'(x)$ où C' désigne la dérivée de la fonction C.
2. Préciser le signe de $C'(x)$ pour $x \in [0, 120]$.
3. Etablir le tableau de variation de C sur l'intervalle.

4. Exprimer en fonction de x la recette résultant de la vente de x repas. On la notera $R(x)$.
5. Représentations graphiques.
   Dans un repère orthogonal d'unités graphiques 1 cm pour 10 repas sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 500 F sur l'axe des ordonnées :
   - tracer la courbe représentative de C sur l'intervalle ;
   - tracer la droite d'équation : $y = 80\,x$.

Etude économique, modélisation

1. Par lecture graphique, indiquer l'intervalle des valeurs de x pour lesquelles le traiteur réalise un bénéfice. Justifier l'interprétation graphique.
2. La fonction coût moyen est définie pour x strictement positif, par :

$$C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$$

   Exprimer $C_m(x)$ en fonction de x.
   Calculer la primitive de cette fonction qui s'annule pour $x = 1$.

Pour voir le corrigé de l'exercice 2. cliquez sur le lien : Corrigé exercice 2

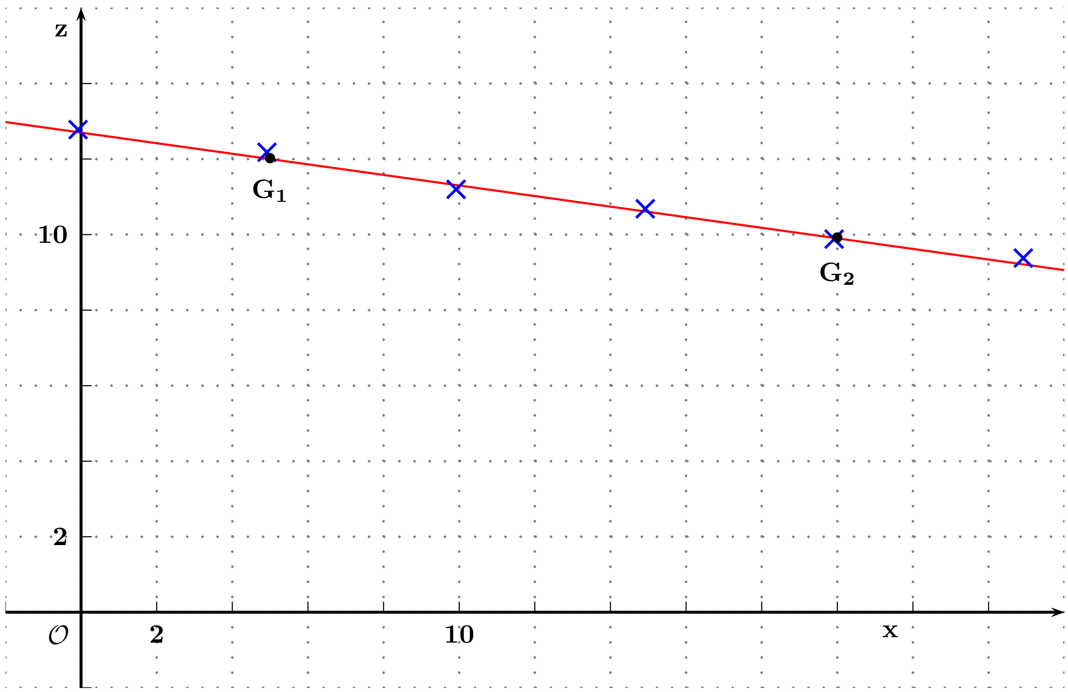
Corrigé Btn 2001

Exercice 1

1. On obtient le tableau ci-dessous en donnant les valeurs à 10^{-1} près.

t_i en minutes	0	5	10	15	20	25
$y_i = \ln N_i$	12,7	12,1	11,2	10,6	9,8	9,3

2. Nuage et droite d'ajustement :



3. On obtient facilement les points moyens. G_1 : $(5; 12)$ et G_2 : $(20; 9,9)$.

4. Une équation de la forme $y = at + b$ est obtenue en utilisant les coordonnées de G_1 et G_2 :

$$y = -0,14t + 12,7$$

5. **a.** Le point de la droite d'ajustement d'abscisse 40 est : $(40; 7,1)$.

b. D'après ce qui précède : $\hat{y} = 7,1$, ce qui entraîne : $\ln \hat{N} = 7,1$ puis : $\hat{N} = e^{7,1} \approx 1200$ cellules.

6. On a d'après l'étude : $y = -0,14t + 12,7 = \ln N$. D'où :

$$N = e^{-0,14t + 12,7}$$

On veut que : $N \leqslant 100$.

$$e^{-0,14t + 12,7} \leqslant 100$$

$$-0,14t + 12,7 \leqslant \ln 100$$

$$t \geqslant \frac{12,7 - \ln 100}{0,14}$$

finalement : $t \geqslant 57,8..$, soit environ après une heure.

Exercice 2

— Etude de C sur $[0;120]$

1. $C'(x) = x + 20$

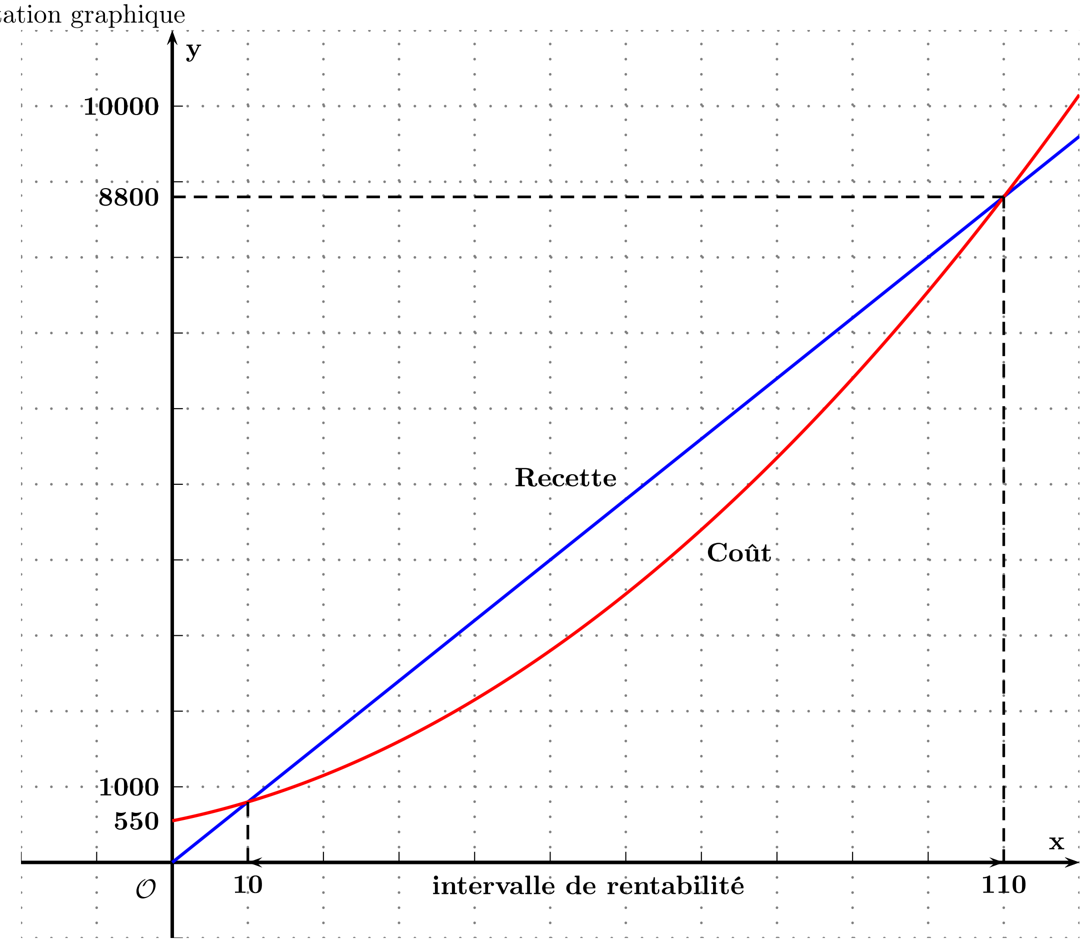
2. $C'(x)$ est un binôme du premier degré qui est positif dès que $x \geqslant -20$ donc positif strictement sur l'intervalle d'étude.

3. On obtient donc le tableau de variation de C :

x	0	120
$C'(x)$	+	
$C(x)$	550 ↗	10150

4. La recette de x repas est : $R(x) = 80x$.

— Représentation graphique



— Modèle économique

1. Un bénéfice est réalisé si $R(x) \geqslant C(x)$ soit graphiquement (pointillés) pour $x \in [10\,;110]$

2. $C_m(x) = \dfrac{0,5x^2 + 20x + 550}{x} = 0,5x + 20 + \dfrac{550}{x}$

3. Les primitives de $C_m(x)$ s'écrivent pour $x > 0$: $F(x) = \dfrac{1}{4}x^2 + 20x + 550 \ln x + k$

et $F(1) = \dfrac{1}{4} + 20 + 550 \ln 1 + k = \dfrac{81}{4} + k$ soit $k + \dfrac{81}{4} = 0$ donc $k = -\dfrac{81}{4}$